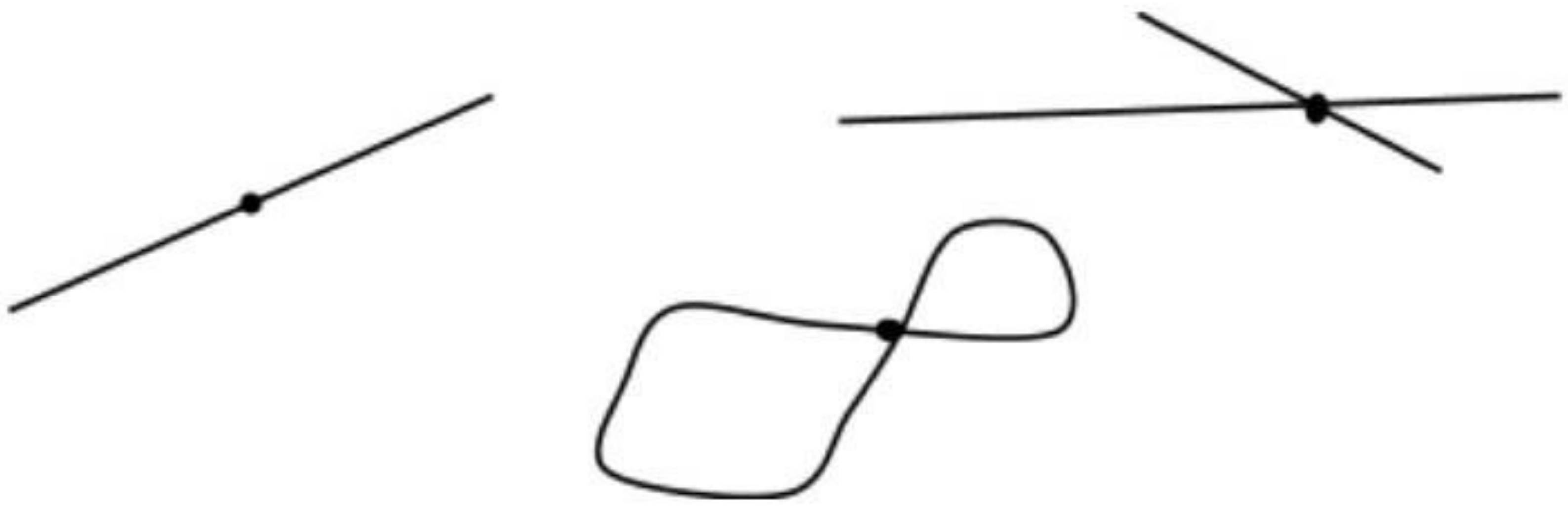
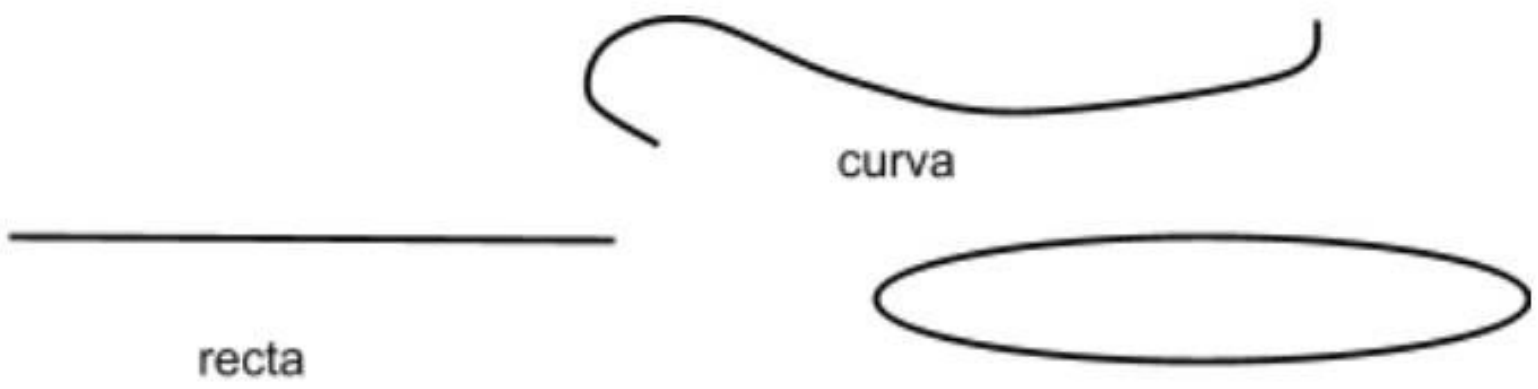
4.1 CONCEPTOS ELEMENTALES DE GEOMETRÍA

Punto

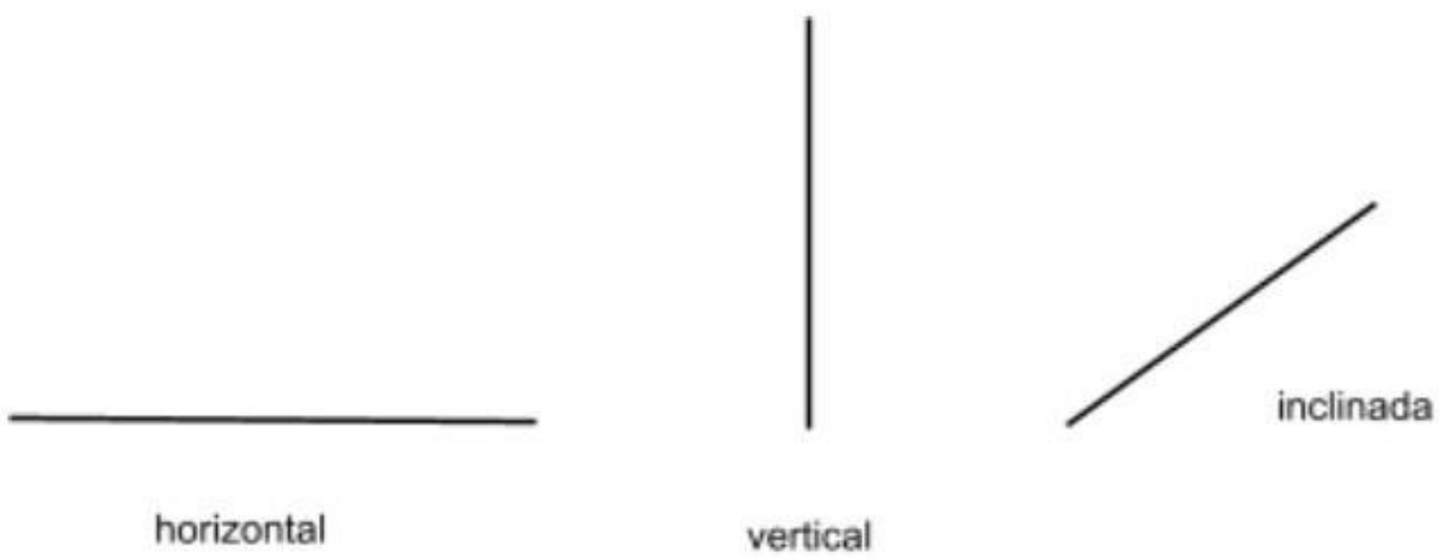


Líneas: Tipos



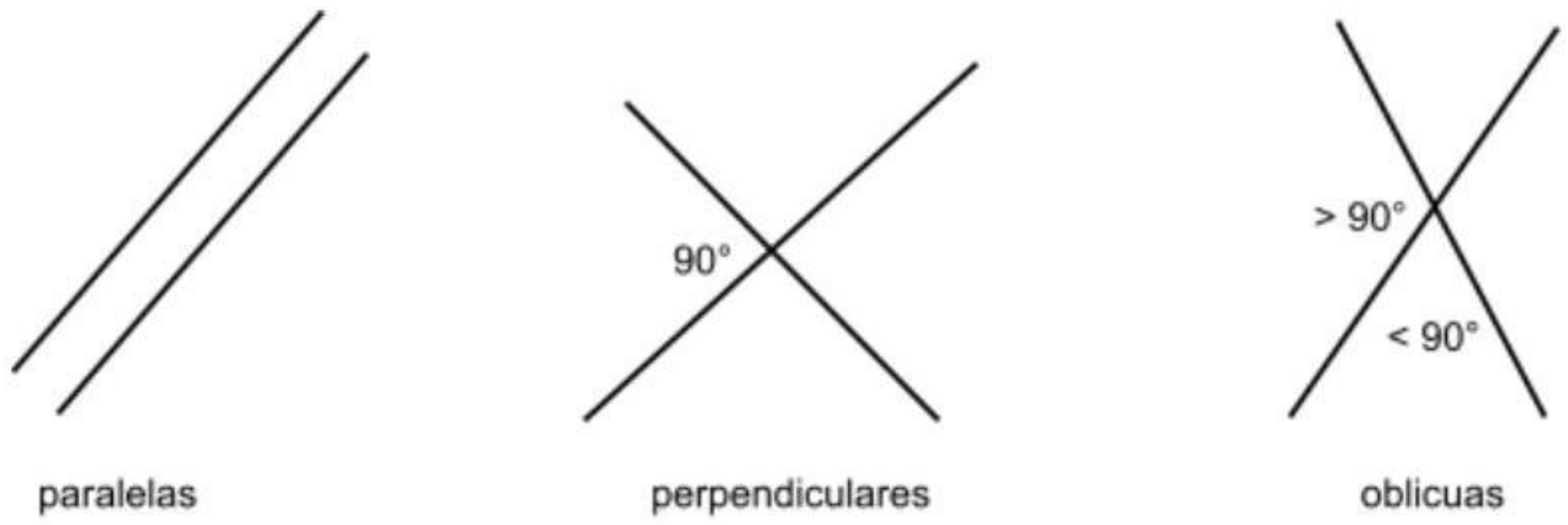
Rectas

Clasificación por su posición



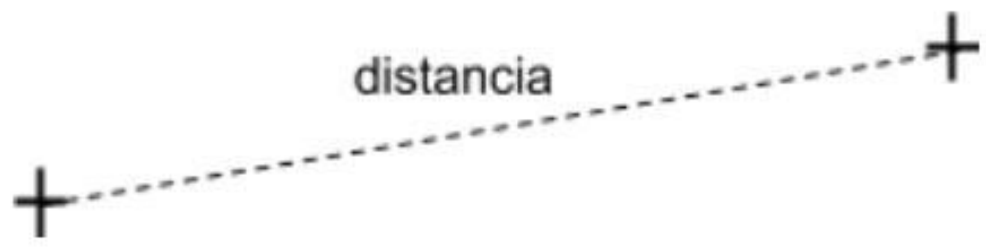
Está clasificación depende de la posición de la recta.

Posición de dos rectas en el plano

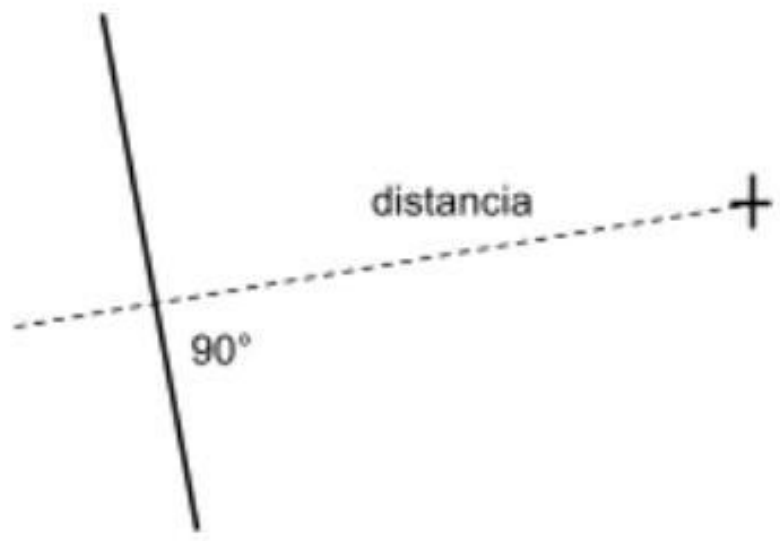


DISTANCIAS:

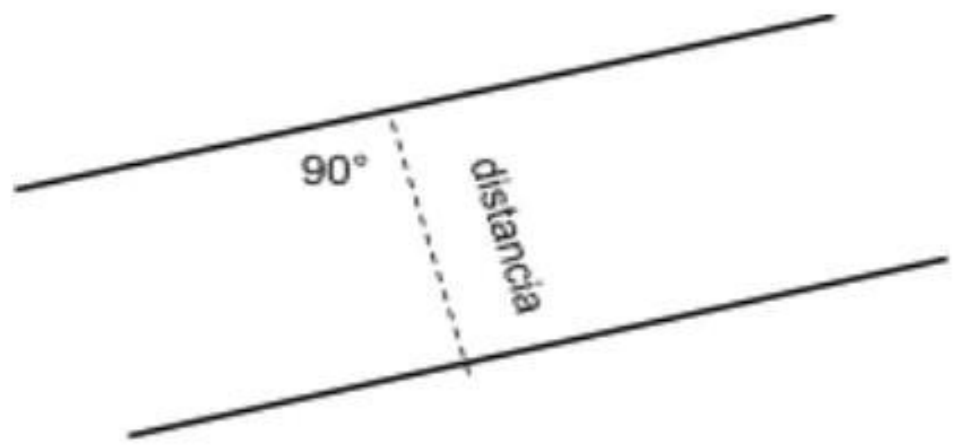
1. Entre dos puntos: Es la longitud del segmento de recta entre los dos puntos.



2. Entre un punto y un recta: Es el valor del segmento de recta perpendicular trazado desde el punto a la recta.

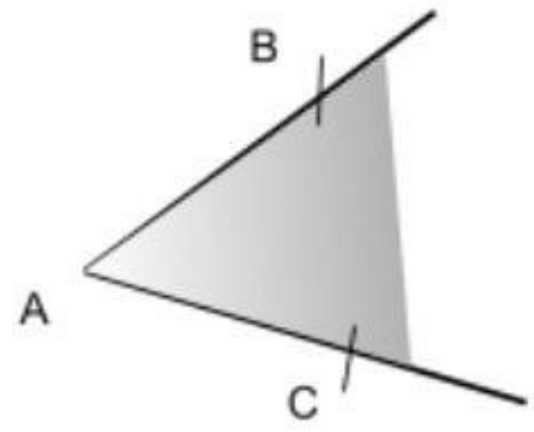
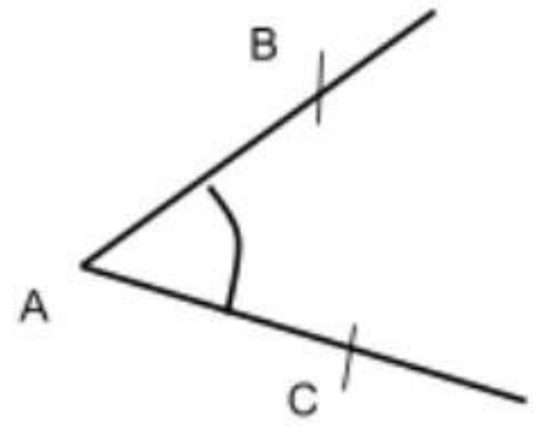
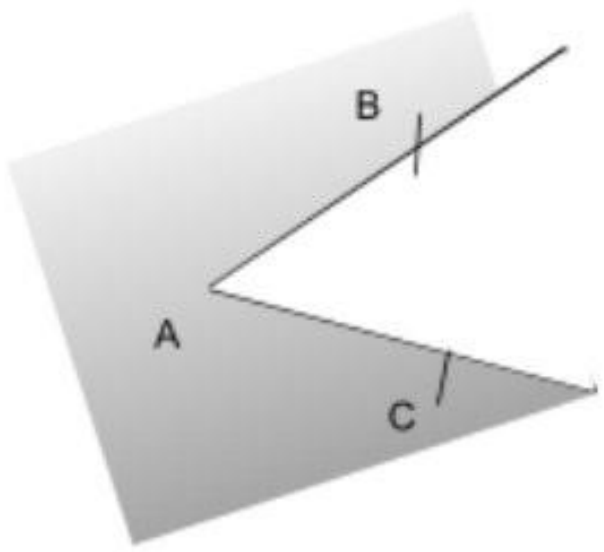
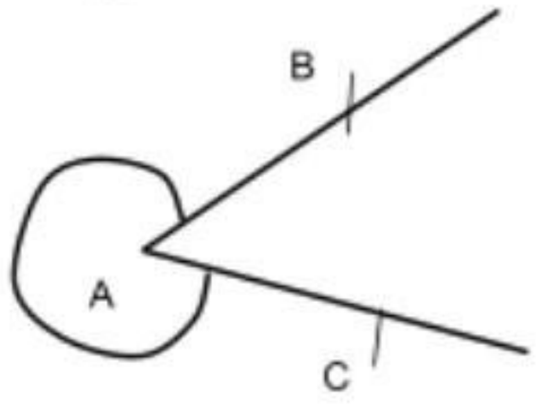


3. Entre dos rectas paralelas: Si se traza una recta perpendicular a las rectas paralelas, la distancia es el valor del segmento que las une.



4.2 ÁNGULOS

Dado el punto A, dos semirrectas con origen en A dividen al plano en dos regiones y cada una de ellas se llama ángulo.

Ángulo convexo	Ángulo cóncavo
	
A se llama **vértice** del ángulo y las semirrectas **AB y AC lados** del mismo.	

Los ángulos no son solo los puntos de las semirrectas con origen en A y que contienen al punto B y C respectivamente, sino también todos los puntos de la región sombreada.

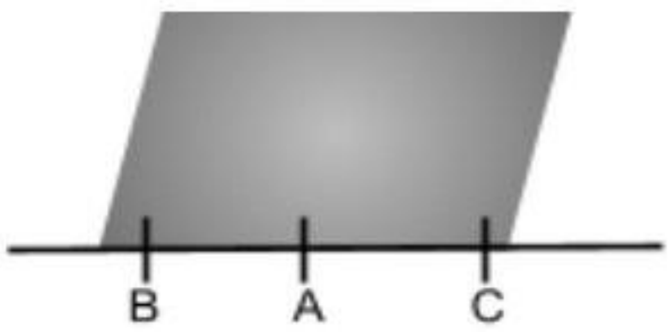
- Distintas notaciones para ángulos son:

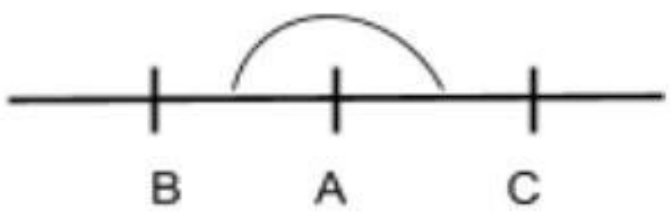
  $B\hat{A}C$, colocando en el centro el vértice del ángulo.

  $\hat{A}$, colocando en el centro el vértice del ángulo.

  Usando letras griegas, $\hat{\alpha}$, β, δ, θ, $\hat{\sigma}$,...

Si los tres puntos **A, B y C** están alineados, el ángulo se llama **llano.** Gráficamente:



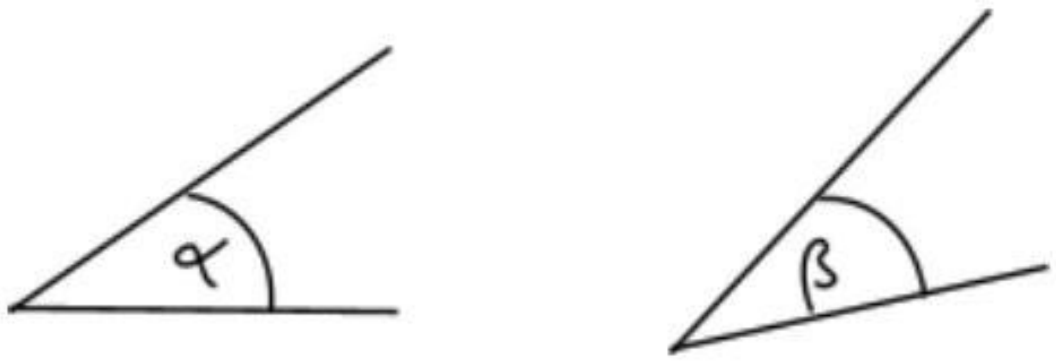


Congruencia

Si dos ángulos se pueden superponer se dice que dichos ángulos son **congruentes.**

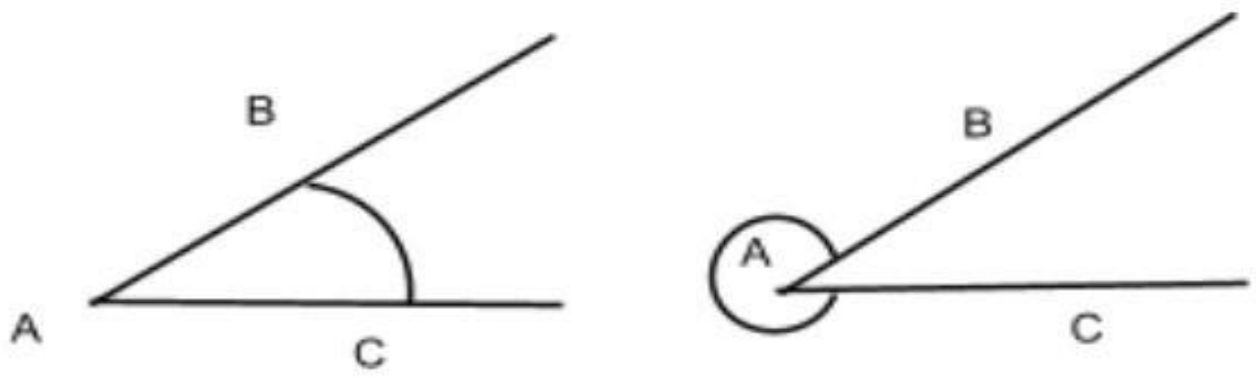
Ejemplos:

1. α y β son congruentes.



2. α y β no son congruentes.

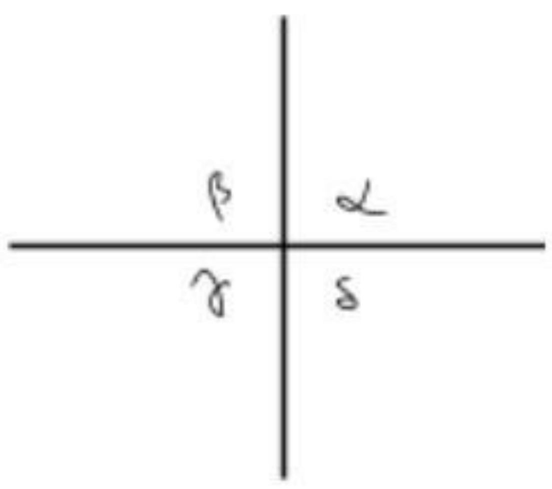
3. Estos ángulos no son congruentes.



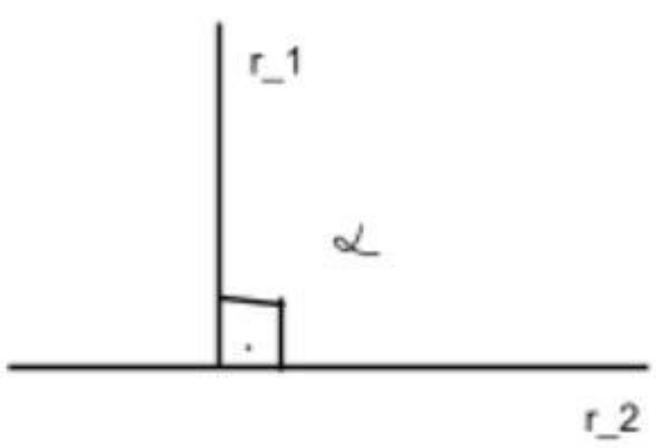
4.2.1 CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS CONVEXOS

Ángulo recto

Cuando los cuatro ángulos determinados por dos rectas que se cortan son congruentes, cada uno de ellos **es un ángulo recto y las rectas son perpendiculares.**



En una gráfica, un ángulo recto se distingue con el símbolo .

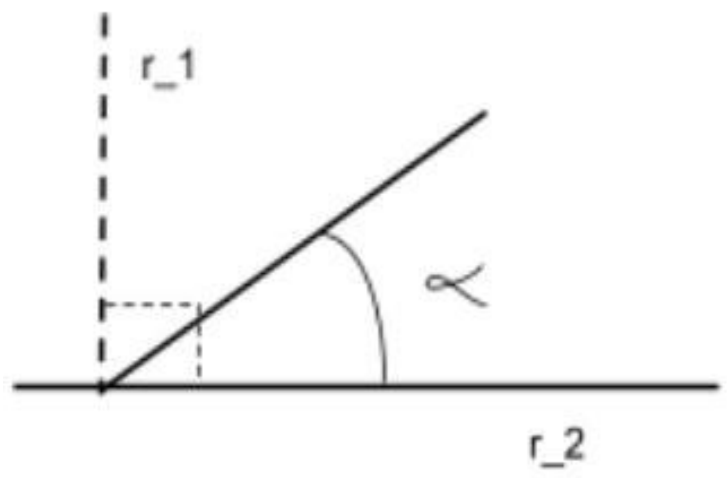


α es recto

$r_1 \perp r_2$

Ángulo agudo

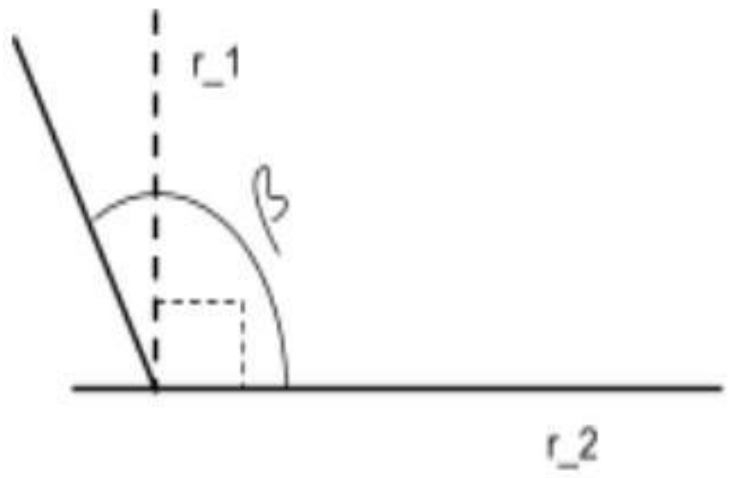
Se dice que un ángulo es agudo si su amplitud es menor que la de un recto.



α es un ángulo agudo.

Ángulo obtuso

Se dice que un ángulo es obtuso si su amplitud es mayor que la de un recto.

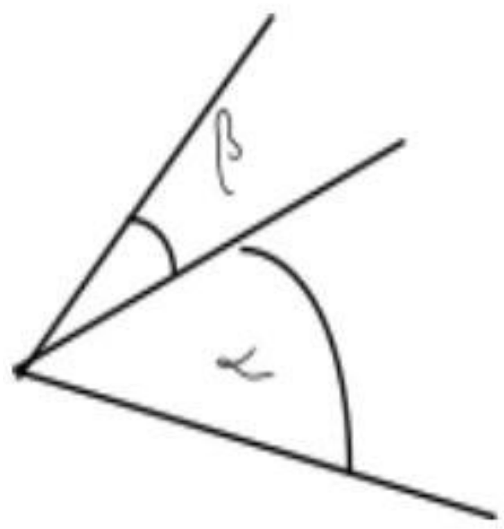


β es un ángulo obtuso.

4.2.2 RELACIONES PARTICULARES ENTRE PARES DE ÁNGULOS.

Ángulos consecutivos

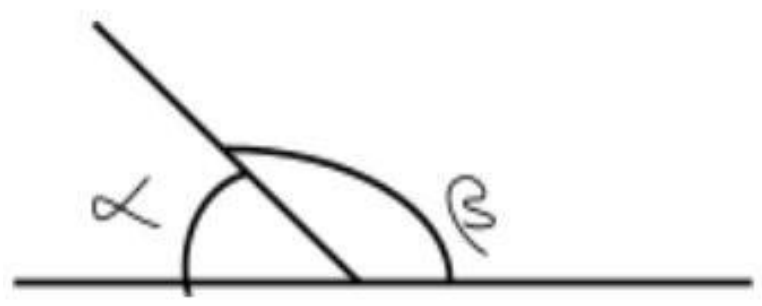
Son dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común.



α *y* β son consecutivos.

Ángulos adyacentes

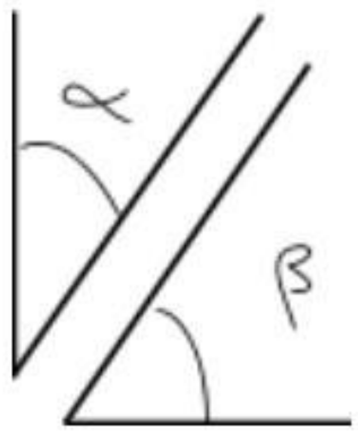
Son dos ángulos consecutivos con sus lados no comunes sobre una misma recta.



α *y* β son adyacentes.

Ángulos complementarios

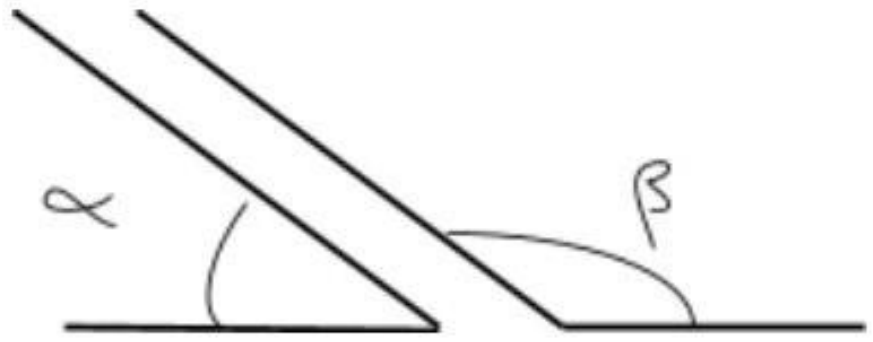
Dos ángulos se dicen complementarios si la suma de sus amplitudes da un ángulo recto.



$\alpha\ y\ \beta$ son complementarios.

Ángulos suplementarios

Dos ángulos se dicen suplementarios si la suma de sus amplitudes da un ángulo llano.



$\alpha\ y\ \beta$ son suplementarios.

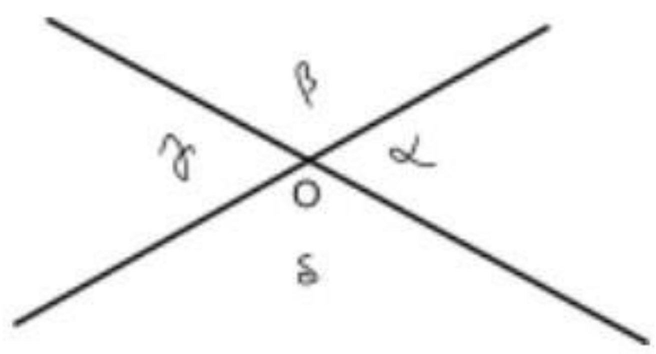
Los ángulos adyacentes son consecutivos, pero los ángulos consecutivos no necesariamente son adyacentes.

Los ángulos adyacentes son suplementarios, pero los ángulos suplementarios no necesariamente son adyacentes.

Ángulos opuestos por el vértice.

Dadas dos rectas que se intersectan en un punto O, quedan determinados cuatro ángulos α, β, $\gamma\ y\ \delta$ convexos. Se puede probar que $\alpha\ y\ \gamma$ son congruentes, y que $\beta\ y\ \delta$ son congruentes.

Cada uno de los pares de ángulos mencionados se dicen **opuestos por el vértice.**



$\alpha\ y\ \gamma$ son opuestos por el vértice.

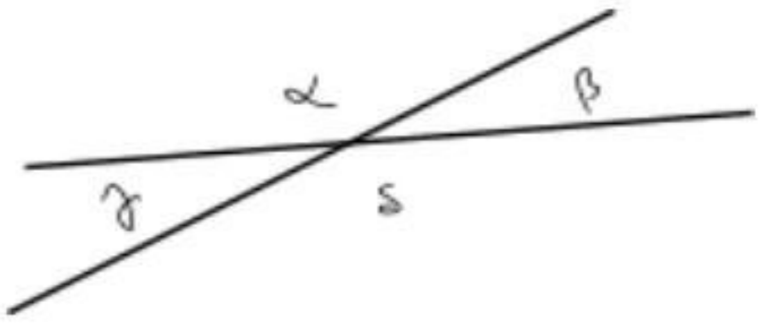
$\beta\ y\ \delta$ son opuestos por el vértice.

Dos rectas no perpendiculares que se cortan determinan cuatro ángulos: dos agudos y dos obtusos:

- Los agudos son opuestos por el vértice y congruentes.
- Los obtusos son opuestos por el vértice y congruentes.
- Un agudo y un obtuso son suplementarios y adyacentes.

Ejemplo

Determinar los ángulos δ, $\gamma\ y\ \alpha$ sabiendo que $\beta\ =\ 25°$



$\gamma\ =\ \beta\ =\ 25°$ porque $\gamma\ =\ \beta$ son opuestos por el vértice y congruentes.

$\alpha\ =\ \delta\ =\ 180°\ -\ \beta\ =\ 180°\ -\ 25°\ =\ 155°$ porque $\alpha\ =\ \delta$ son opuestos por el vértice y congruentes y $\alpha\ y\ \beta$ son suplementarios.

En consecuencia:

$\gamma\ =\ \beta\ =\ 25°$

$\alpha\ =\ \delta\ =\ 155°$

1. conocida la diferencia entre dos ángulos complementarios $\alpha\ y\ \beta$ calcula cada uno de ellos.
    a. $\alpha\ -\ \beta\ =\ 12°$
    b. $\alpha\ -\ \beta\ =\ 88°$
    c. $\alpha\ -\ \beta\ =\ 34°$
    d. $\alpha\ -\ \beta\ =\ 0°$
2. Completa:

    El suplemento de un ángulo agudo es…………………………………

    El suplemento de un ángulo obtuso es…………………………………

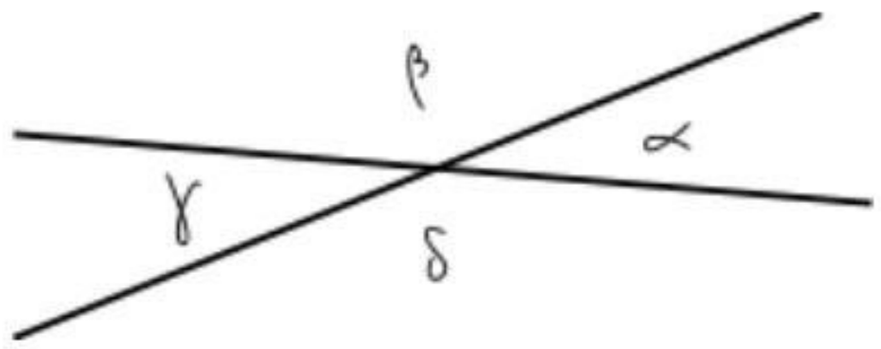
    El suplemento de un ángulo recto es………………………………….

    El suplemento de un ángulo llano es………………………………….

    Si un ángulo es igual a su complementario vale……………………….

Si un ángulo es igual a su suplemento vale……………………………

3.



$\alpha = 30° 25' 30''$

$\beta =$……………………

$\delta =$……………………

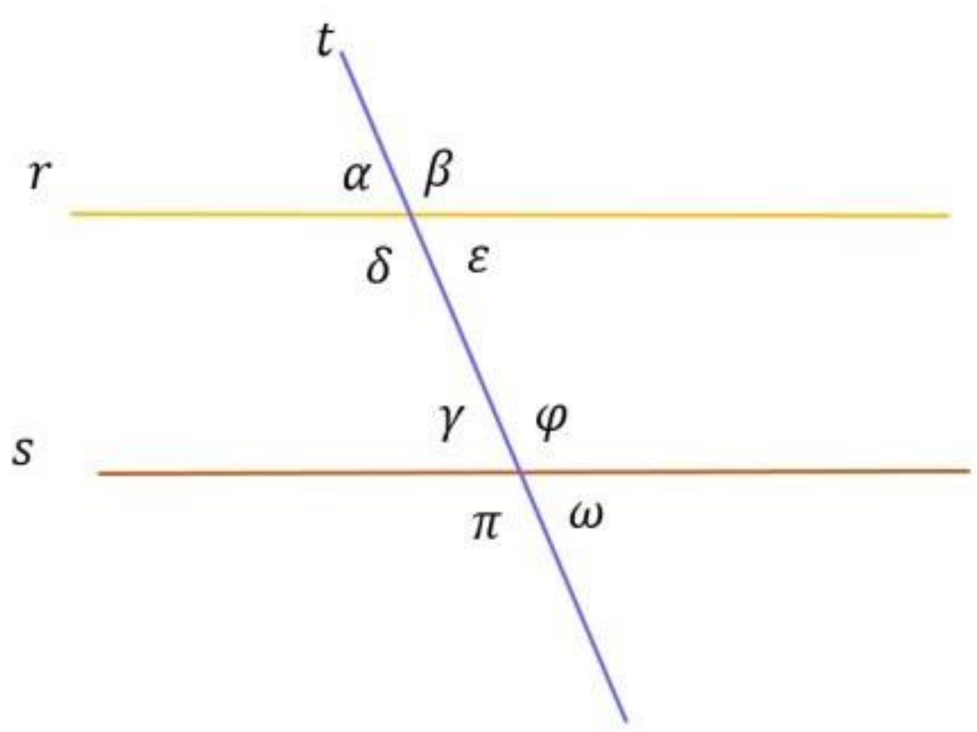
$\gamma =$……………………

4. Dos rectas que se cortan dividen al plano en cuatro ángulos α, β, γ y δ.

   ¿Puede ser $\alpha = 230°$?¿Por qué?

   ¿qué condiciones debe cumplir α?

Ángulos determinados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal.



ε y γ, δ y φ son **alternos internos** (congruentes).

α y γ, β y φ, ε y ω, δ y π son **correspondientes** (congruentes).

ε y φ, α y π, β y ω, δ y γ son **conjugados** (suplementarios).

α y ω, β y π son **alternos externos** (congruentes).

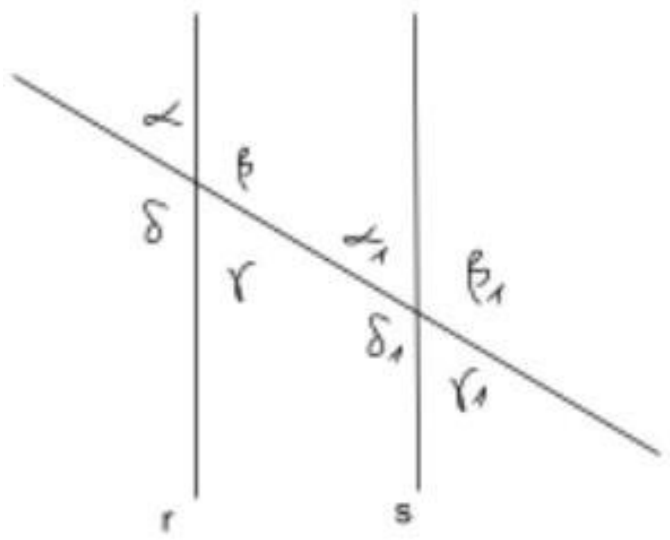
Dos rectas paralelas cortadas por una transversal no perpendicular a ellas determinan ocho ángulos, cuatro agudos y cuatro obtusos:

- Los agudos son congruentes.
- Los obtusos son congruentes.
- Un agudo y un obtuso son suplementarios.

Si t es perpendicular a r (y t perpendicular a s) los ocho ángulos son congruentes.

Ejemplo:

Sea r // s y $\alpha = 40°10'$, calcula los ángulos de la figura.

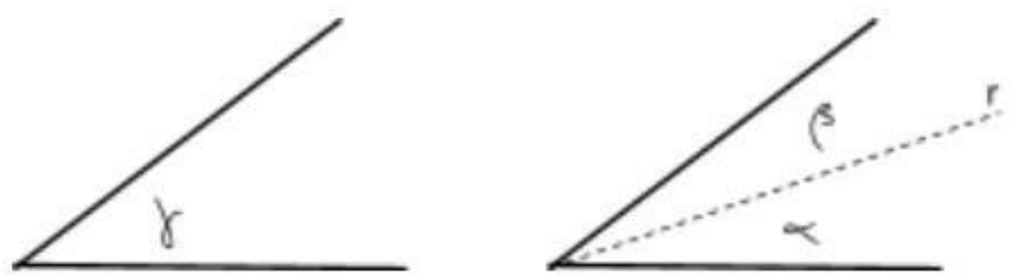


$\alpha = \lambda = \alpha_1 = \lambda_1 = 40°\,10'$ (los ángulos agudos)

$\delta = \beta = \delta_1 = \beta_1 = 180° - 40°\,10' = 139°\,50'$ (los ángulos obtusos)

4.2.3 BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Es la semirrectas con origen en el vértice del ángulo, que lo divide en dos ángulos congruentes.

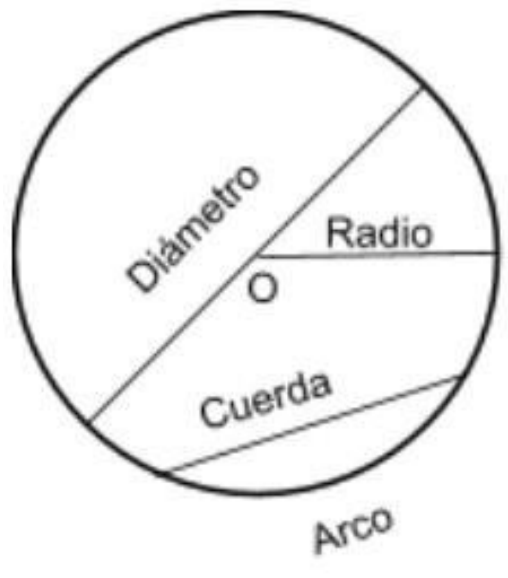


$\alpha\ y\ \beta$ congruentes.

r bisectriz de γ.

4.3 CIRCUNFERENCIA

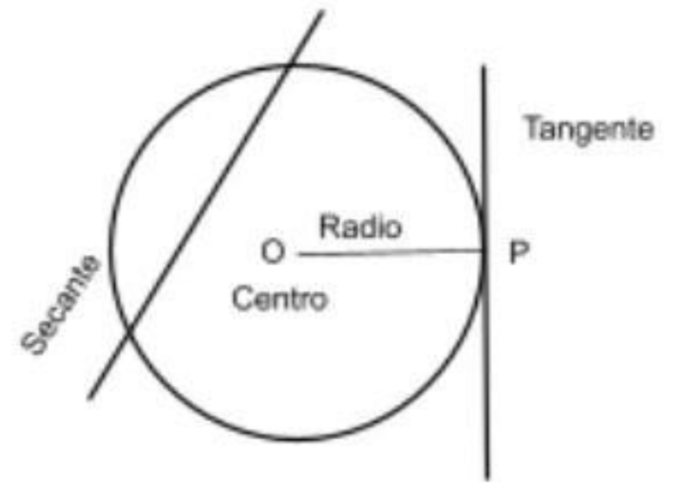
Circunferencia es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo O, llamado centro de la circunferencia.



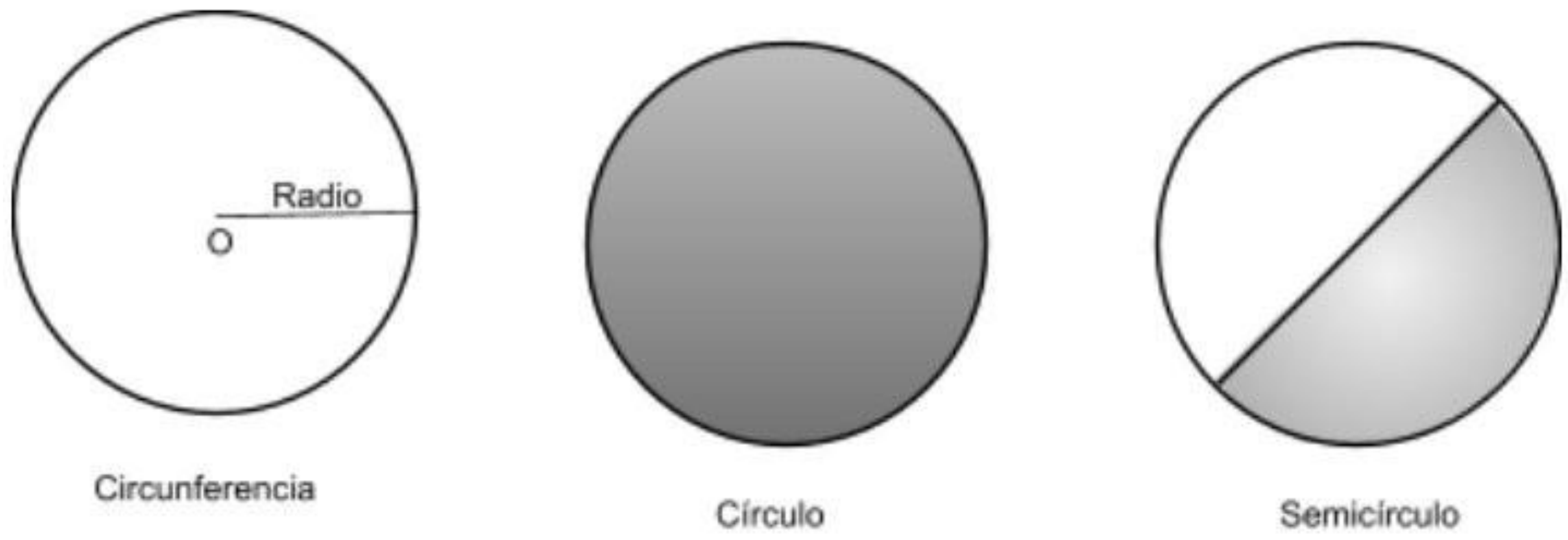
Recuerda que:

- Una recta es exterior a una circunferencia si no tiene puntos en común con la misma.
- Una recta es secante a una circunferencia si tiene dos puntos en común con ella.

- Una recta es tangente a una circunferencia si tiene un solo punto en común con ella. Una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio cuyo extremo es el punto de tangencia.



Circunferencia, Círculo y Semicírculo

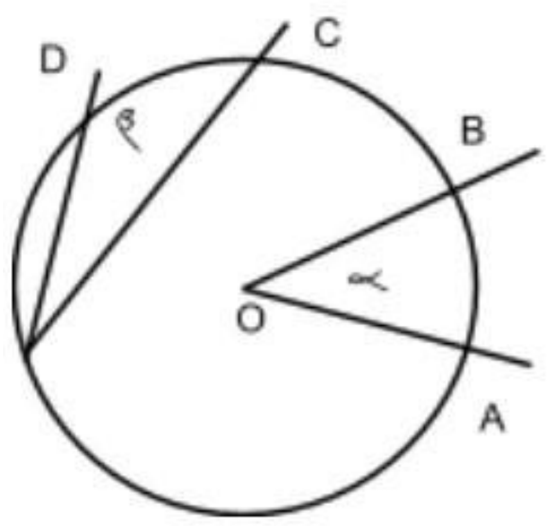


Ángulos en una circunferencia

El ángulo que tiene por vértice un punto de una circunferencia y cuyos lados son secantes a la misma se llama **ángulo inscripto** en ella.

El ángulo cuyo vértice es el centro de una circunferencia se llama **ángulo central.**

Ejemplo



α ángulo central.

β ángulo inscripto.

AB arco subtendido por α.

DC arco subtendido por β.

Longitud de la circunferencia

La longitud de la circunferencia es $2\pi . r$.

4.4 SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Los sistemas de medición más usados para medir la amplitud de un ángulo son el sistema sexagesimal y el sistema radial:

1. **Sistema Sexagesimal:** Su unidad es el grado sexagesimal y sus subunidades son el minuto y el segundo sexagesimales.

Grado sexagesimal	$1° = \frac{1\,Recto}{90}$
Minuto sexagesimal	$1' = \frac{1°}{60}$
Segundo sexagesimal	$1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1°}{3600}$

En consecuencia, la amplitud de un ángulo recto es 90° y la de un llano 180°.

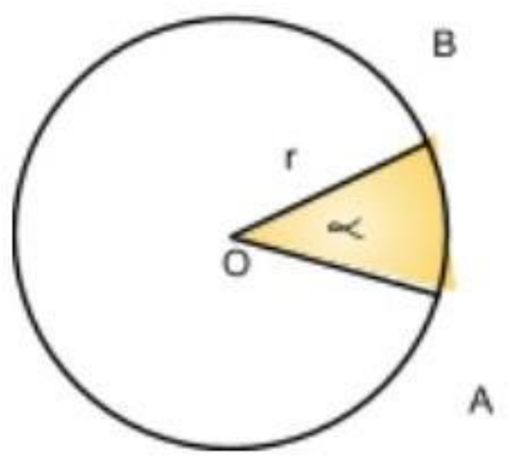
Ejemplo

25° 23´ 45´´ a veces es necesario expresarlo de la siguiente manera:

$$25°\,23'\,45'' = 25° + 23' + 45'' = 25° + \frac{23°}{60} + \frac{45°}{3600} \approx 25,40\,°$$

2. **Sistema Radial:** Su unidad es el radián.

Dada una circunferencia de radio r, se define un radián cómo la amplitud del ángulo subtendido por un arco igual al radio de la circunferencia.



longitud de arco $AB = r.\alpha = 1$

- Si el ángulo central de una circunferencia es un radian, la longitud del arco correspondiente es r, el radio. Si el ángulo central fuera φ, medido en radianes, entonces la longitud del arco sería $s = r.\varphi$. De esta última igualdad se deduce que la amplitud del ángulo φ es un número real.

- Cómo la longitud de la semicircunferencia es $\pi.r$, $\pi.r$ es la longitud del arco cuyo ángulo central es de 180°.
- Existen las siguientes correspondencias entre los dos sistemas de medición de ángulos:

  $180° \leftrightarrow \pi$

  $90° \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$

Ejemplos

1. Dado $\alpha = \pi/3$, el valor equivalente a la misma amplitud en grados se obtiene aplicando una regla de tres:

   $\pi \leftrightarrow 180°$

   $\frac{\pi}{3} \leftrightarrow x = \frac{\pi/3 \,.\, 180°}{\pi} = 60°$

2. Dado $25°23'45''$, su amplitud en radianes se obtiene:

   $180° \leftrightarrow \pi$

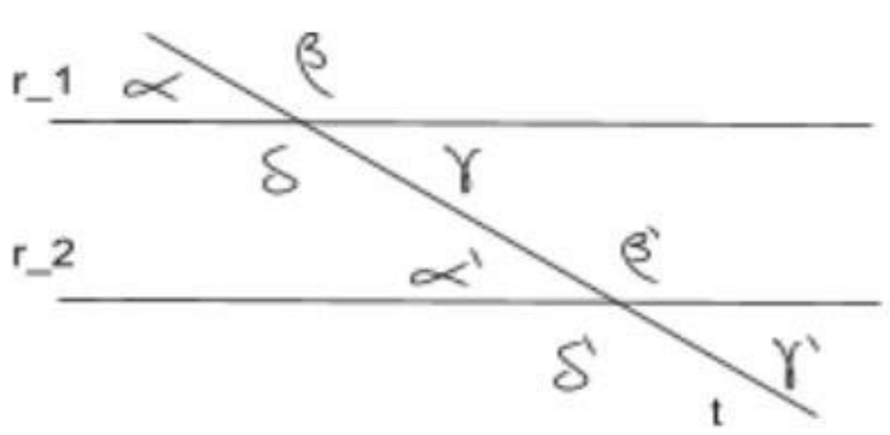
   $25°23'45'' \leftrightarrow x = \frac{25°23'45''.\pi}{180°} \approx \frac{25{,}40°.\pi}{180°} \approx 0.44$

3. Si $\beta = \frac{\pi}{6}$, hallar el ángulo complementario y suplementario:

   $\frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ (ángulo complementario)

   $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (ángulo suplementario)

1. Sea

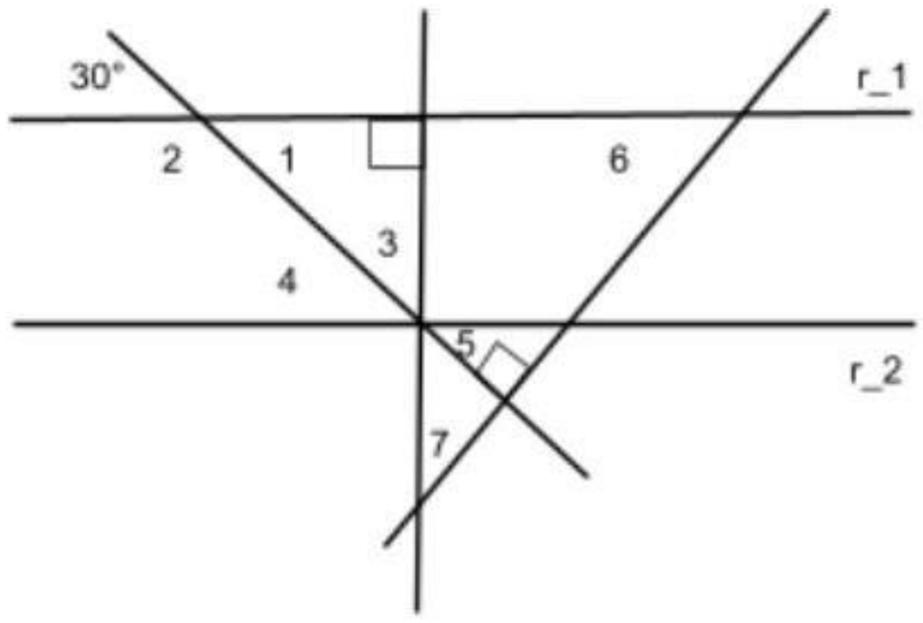


$r_1 // r_2$

$\alpha = 35°\,40'$

Calcula los siete ángulos restantes.

2. Determina el valor de los ángulos señalados con números en la figura dada, sabiendo que $r_1 // r_2$



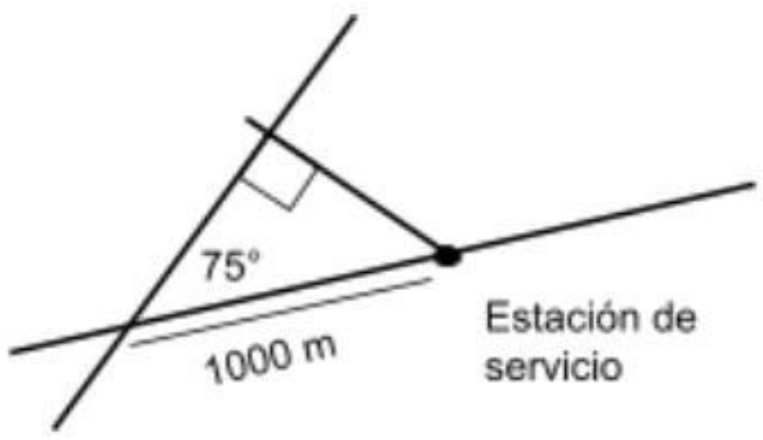
3. a. Convierte las siguientes amplitudes a sus equivalentes en el sistema radial:

$1°,\ 30°,\ 45°,\ 60°,\ 120°,\ 150°,\ 90°,\ 35°,\ 40',\ 46°20'30''$

b. Convierte las siguientes amplitudes a sus equivalentes en el sistema sexagesimal:

$1\,rad,\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ 3.6,\ \frac{7}{6}\pi\,rad,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{4}$

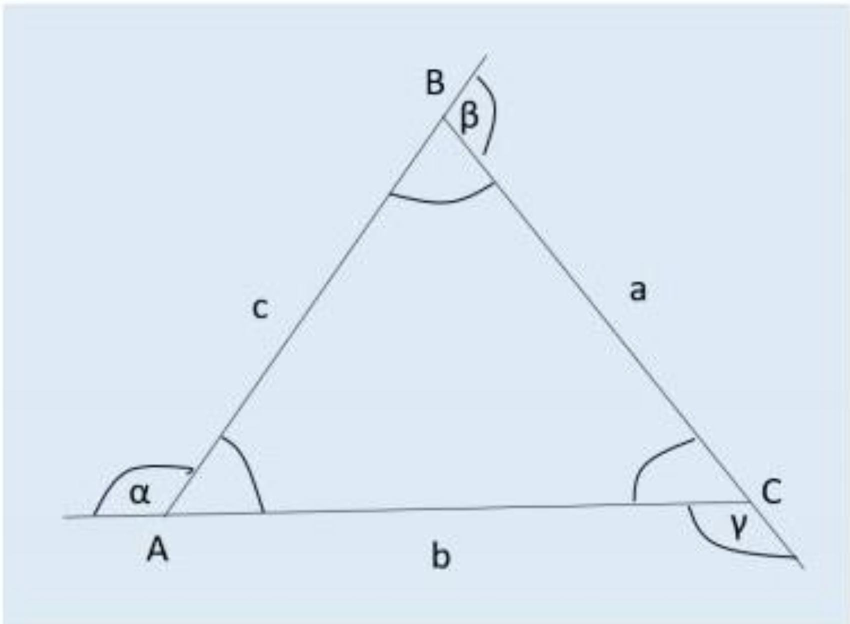
4. Dos caminos rectos se cortan formando un ángulo de 75°. Encuentra la distancia más corta desde un camino hasta una estación de servicio situada en el otro camino a 1000 m del punto de intersección.



   a. Subraya los verbos e identifica que indica cada uno de ellos.
   b. Haz una lista con los datos del problema.
   c. ¿Qué significado tiene la expresión "distancia más corta"?
   d. ¿Qué herramientas de este capítulo utilizarías para resolver el problema?

4.5 TRIÁNGULOS.

Dados tres puntos no alineados A, B y C, llamaremos triángulo a la intersección de los ángulos $A\hat{B}C,\ \ B\hat{C}A\ \ y\ \ B\hat{A}C$.



Elementos y propiedades			
Vértices	**Lados**	**Ángulos interiores**	**Ángulos exteriores**
A, B, C	$\overline{AB},\ \overline{BC},\ \overline{CA}$ O c, a, b **Propiedades:** $a < b + c,\ a > b - c$ $b < a + c,\ b > a - c$ $c < a + b,\ c > a - b$	$A\hat{B}C,\ B\hat{C}A,\ B\hat{A}C$ O $\hat{B},\ \hat{C},\ \hat{A}$ **Propiedad:** $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$	$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ **Propiedades:** $\alpha + \beta + \gamma = 360°$ $\alpha = \hat{B} + \hat{C}$ $\beta = \hat{A} + \hat{C}$ $\gamma = \hat{A} + \hat{B}$

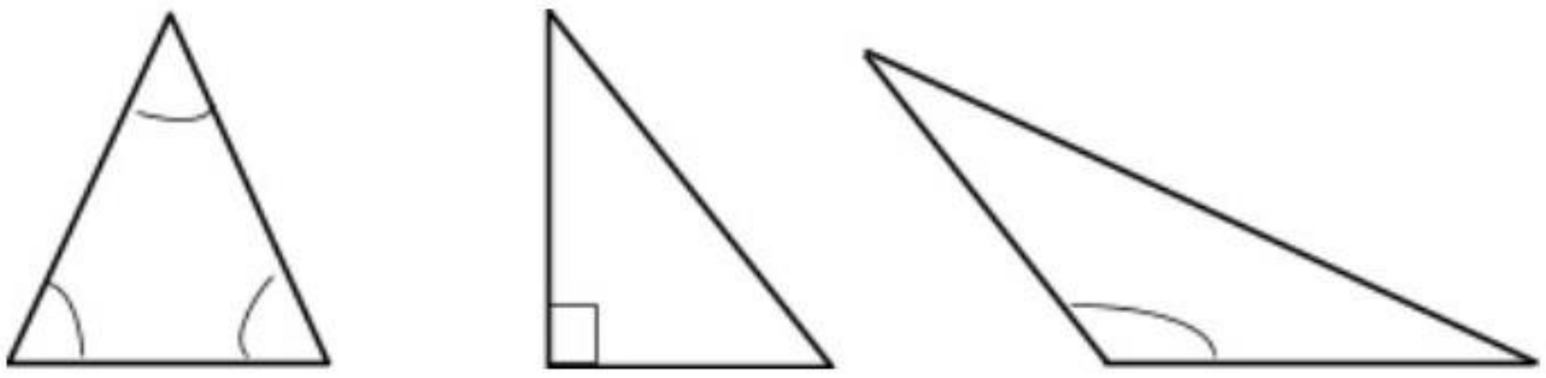
4.5.1 CLASIFICACIÓN

1. **Según sus ángulos interiores:**

Triángulo Rectángulo: Es aquel triángulo que tiene un ángulo interior recto.

Triángulo Acutángulo: Es aquel triángulo que tiene todos sus ángulos interiores agudos.

Triángulo Obtusángulo: Es aquel triángulo que tiene un ángulo interior obtuso.

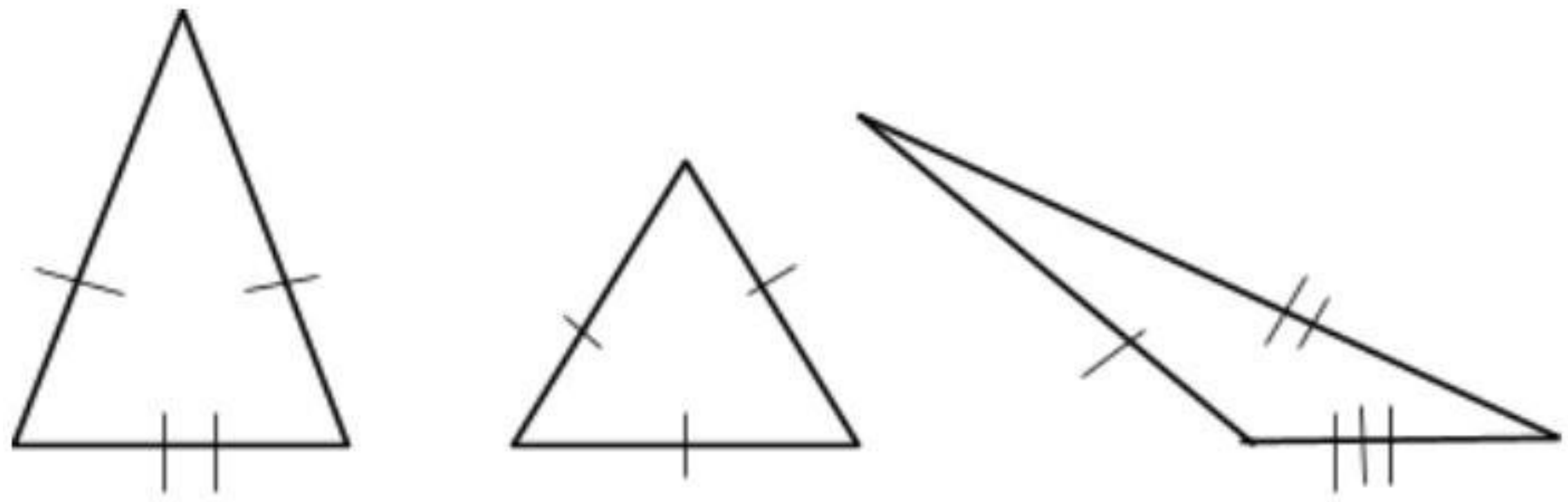


2. **Según sus lados:**

Triángulo Equilátero: Es aquel triángulo que tiene todos sus lados congruentes (de igual longitud).

Triángulo Isósceles: Es aquel triángulo que tiene dos lados congruentes.

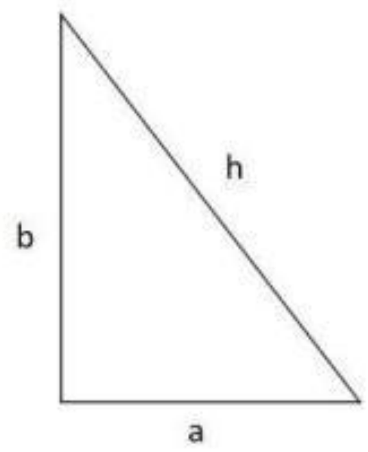
Triángulo Escaleno: Es aquel triángulo que tiene todos sus lados de distinta longitud.



Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

La hipotenusa es el lado que se opone al ángulo recto (el de mayor longitud) y los catetos, los lados restantes.

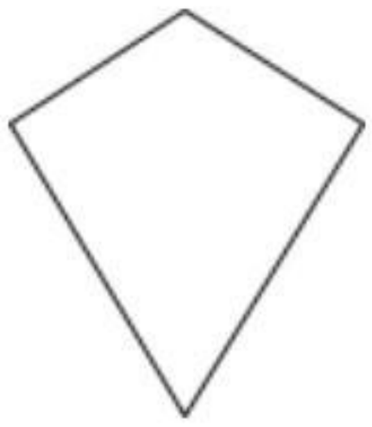
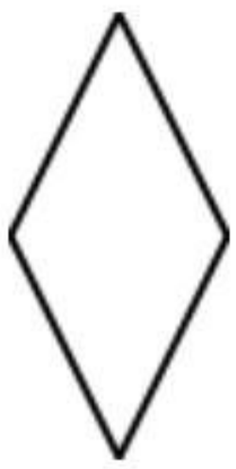
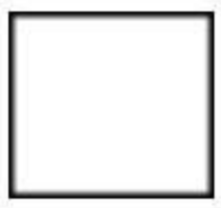
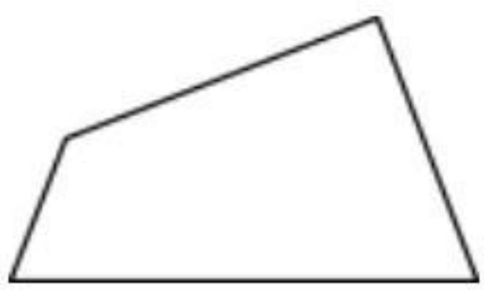


$h^2 = a^2 + b^2$

La altura correspondiente a un lado de un triángulo, es el segmento perpendicular determinado entre el vértice opuesto y la recta que contiene al lado.

4.6 CUADRILÁTEROS PARTICULARES

NOMBRE	FIGURA	PROPIEDADES	
		LADOS	ÁNGULOS

ROMBOIDE			Dos pares de lados congruentes	Un par de ángulos opuestos congruentes
TRAPECIO		**Un par de lados paralelos**		
TRAPECIO ISÓSCELES			Un par de lados opuestos congruentes	Dos pares de ángulos adyacentes a las bases congruentes
PARALELOGRAMO		**Dos pares de lados paralelos**	Dos pares de lados opuestos congruentes	Dos pares de ángulos opuestos congruentes
RECTÁNGULO				Cuatro ángulos congruentes
ROMBO			Cuatro lados congruentes	Dos pares de ángulos opuestos congruentes
CUADRADO				Cuatro ángulos congruentes
TRAPEZOIDE				

ÁREAS Y PERÍMETROS.

FIGURA	PERÍMETRO	ÁREA
Triángulo de lados $l_1, l_2\, y\, l_3$ y alturas $h_1, h_2\, y\, h_3$, respectivamente.	$l_1 + l_2 + l_3$	$\frac{l_i.h_i}{2},\ i = 1, 2, 3$
Cuadrado de lado l.	$4.l$	l^2
Rectángulo de lados $a\, y\, b$.	$2.a + 2.b$	$a.b$
Rombo de lado l y diagonales $D\, y\, d$.	$4.l$	$\frac{D.d}{2}$
Trapecio de bases (lados paralelos) B y b, altura h y lados no paralelos $l_1\, y\, l_2$	$B + b + l_1 + l_2$	$\frac{(B+b).h}{2}$

1. Completa con: nunca, a veces o siempre:
   a. Un triángulo rectángulo…………………………….. es triángulo isósceles.
   b. Un triángulo rectángulo…………………………….. es triángulo equilátero.
   c. Un triángulo equilátero…………………………….. es triángulo obtusángulo.
   d. Un triángulo isósceles…………………………….. es triángulo rectángulo.
   e. Un triángulo escaleno…………………………….. es triángulo acutángulo.
   f. Un triángulo isósceles…………………………….. es triángulo obtusángulo.
   g. Un triángulo rectángulo…………………………….. es triángulo obtusángulo.
2. ¿Cuánto miden los ángulos interiores de un triángulo equilátero?
3. ¿Cuánto miden los ángulos interiores agudos de un triángulo rectángulo que es isósceles?

4. En un triángulo isósceles los lados iguales miden a = (3x-5) cm y b = (x+5) cm y el lado distinto mide c =18 cm, encuentra el perímetro del triángulo. Realiza una figura de análisis. Justifica claramente tu respuesta.

5. Sabiendo que en un triángulo isósceles los lados iguales miden (2x2+4) cm y (x2-5x) cm y que el otro lado mide 21cm, encuentra el perímetro del triángulo. Realiza una figura de análisis.

6. Sabiendo que un triángulo es equilátero y que dos de sus lados miden (3x+27) cm y (6x+6) cm. Encuentra el perímetro del triángulo. Realiza una figura de análisis.

7. Sabiendo que en un triángulo sus lados miden a= (2x+5) cm; b= (6x) cm y c= (3x+9) cm y que su perímetro es 36 cm, encuentra a longitud de cada uno de los lados y clasifica al triángulo según sus lados.

8. Sabiendo que en un triángulo sus lados miden a= (x+2) cm; b= (2x-5) cm y c= (x+14) cm y que su perímetro es 63cm, encuentra a longitud de cada uno de los lados y clasifica al triángulo según sus lados.

9. Sabiendo que en un triángulo sus lados miden a= x cm; b= (2x-10) cm y c= (x+4) cm y que su perímetro es 34 cm, encuentra la longitud de cada uno de los lados y clasifica al triángulo según sus lados.

10. Sabiendo que en un triángulo sus ángulos interiores miden a= 5x+5°; b= 3x+45° y c= 8x-10° encuentra la amplitud de cada uno de los ángulos y clasifica al triángulo según sus ángulos.

11. Sabiendo que en un triángulo sus ángulos interiores miden a= 2x+32° 13’ 45’’; b= x+26° 42’ 32’’ y c= 5x-18° 56’ 17’’ encuentra la amplitud de cada uno de los ángulos y clasifica al triángulo según sus ángulos.

12. Sabiendo que en un triángulo sus ángulos interiores miden a= x-23°; b= 9x-6° y c= -6x+149° encuentra la amplitud de cada uno de los ángulos y clasifica al triángulo según sus ángulos.