3.1. GRÁFICAS EN EL PLANO

Par ordenado

Dos elementos dados en un cierto orden constituyen un par ordenado. Si estos elementos son x e y, el par ordenado es (x, y). Se llama primera componente a x y segunda componente a y, mientras que el par ordenado (y, x) la primera componente es y y la segunda componente es x. En consecuencia, los pares (1, 2) y (2, 1), por ejemplo, son diferentes.

Así como se presentan gráficamente los números reales en la recta numérica, es posible representar los pares ordenados de números reales en el plano, como se describe a continuación.

Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales en el plano

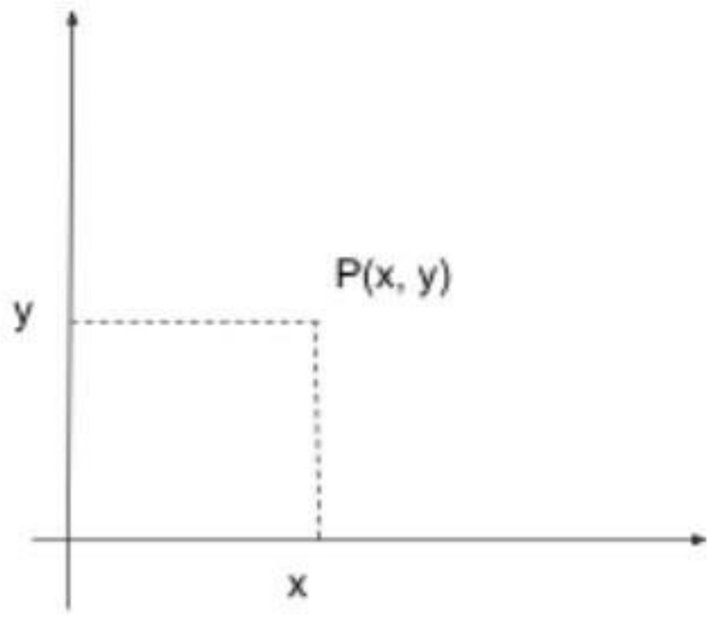
Está formado por dos rectas numéricas perpendiculares llamadas ejes cartesianos. El eje horizontal, eje de las abscisas, y el eje vertical, eje de las ordenadas. El punto de intersección de ambos recibe el nombre de origen de coordenadas. El plano en el que se ha dibujado un sistema de coordenadas recibe el nombre de plano cartesiano.

A todo par ordenado (x, y) le corresponde un punto P en el plano cartesiano, que se obtiene de la siguiente manera.

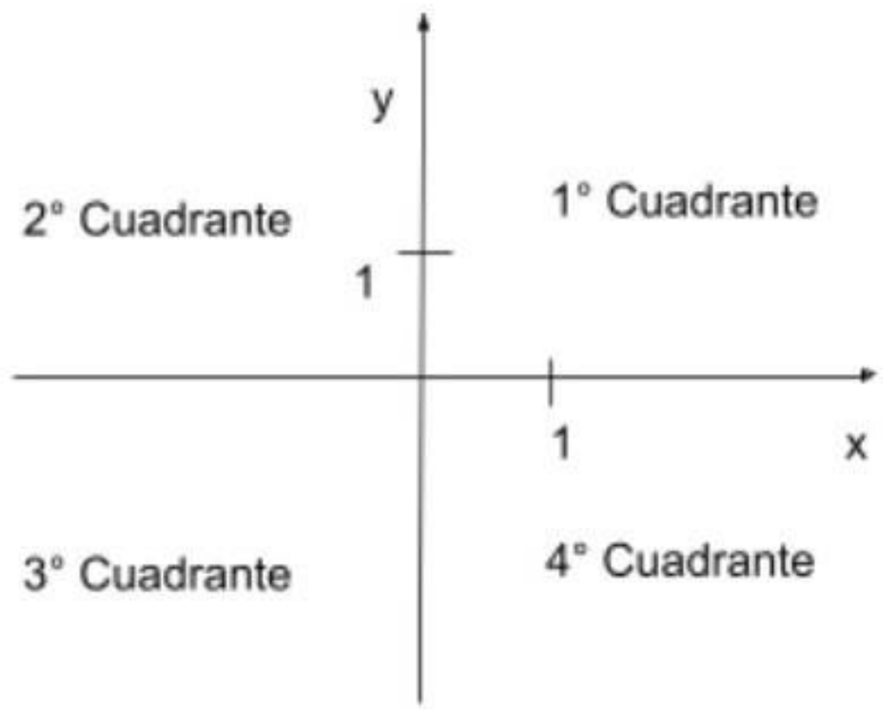
1. Se ubica x en el eje de las abscisas e y en el eje de las ordenadas.
2. se trazan por x e y paralelas a los ejes cartesianos.

El punto de intersección de dichas rectas es el punto P de coordenadas x e y, que se denota P(x, y).

Recíprocamente, dado un punto P en el plano cartesiano se pueden obtener sus coordenadas trazando por P dos rectas, una paralela al eje de las ordenadas y otra paralela al eje de las abscisas. La intersección de la primera con el eje de las abscisas es la primera componente del par, y la intersección de la segunda con el eje de las ordenadas es la segunda componente del par.



El sistema cartesiano determina en el plano cuatro ángulos rectos llamados cuadrantes: Primero, segundo, tercero y cuarto.



1. Las flechas ubicadas en el extremo derecho del eje horizontal y en el extremo superior del vertical indican que estas son las direcciones positivas de ambos ejes, por lo tanto no debes hacer flechas en ambos extremos de los ejes cartesianos.
2. En matemática las unidades que se toman en ambos ejes deben ser iguales; pero en otras ciencias pueden ser diferentes, de acuerdo a los valores que asuman x e y.
3. Al graficar el punto (x, y), con x se mide el desplazamiento horizontal, mientras que con y, el vertical.
4. Los puntos ubicados sobre el eje x tienen coordenada y nula, porque no hubo desplazamiento vertical. Los ubicados sobre el eje y tienen coordenada x nula, ya que no hubo desplazamiento horizontal.

Observa los siguientes gráficos:

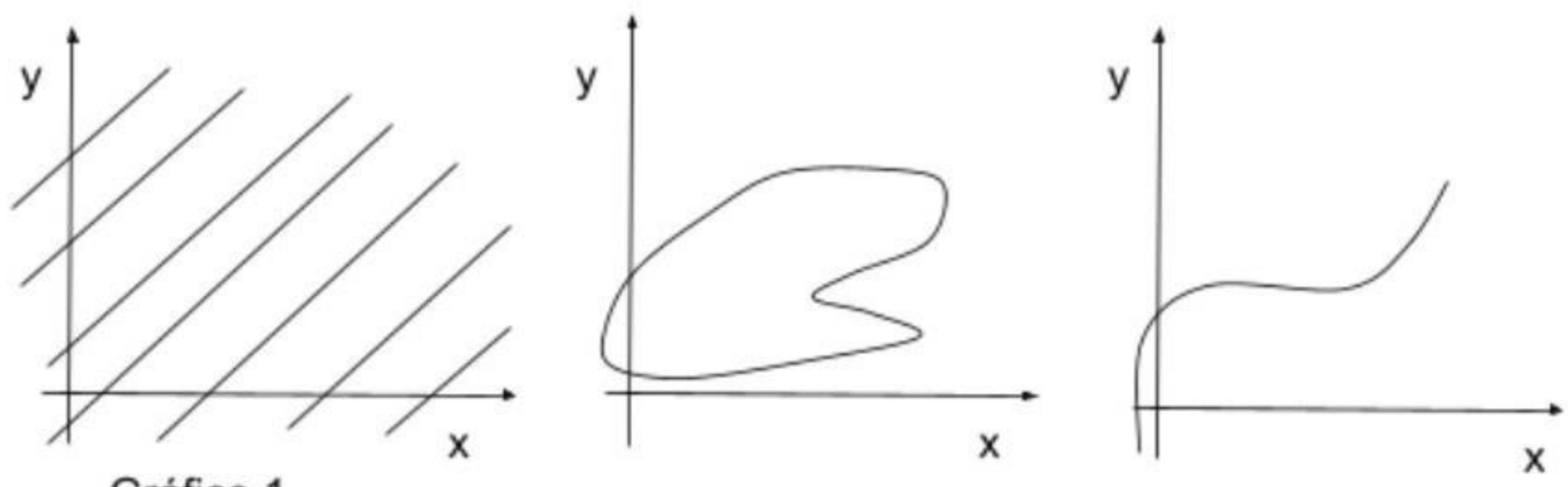


Gráfico 1 Gráfico 2 Gráfica 3

El gráfico 1 representa el **producto cartesiano** XxY, con $X = \Re$ e $Y = \Re$.

Tanto en el gráfico 2 como en el 3 se han representado algunos pares ordenados del plano. Tales conjuntos, contenidos en el producto cartesiano, son gráficas de **relaciones** de X en Y.

En el gráfico 3 se observa que a todo x, elemento de X, le corresponde un único valor de y, cosa que no ocurre en el gráfico 2. Tal conjunto es la gráfica de una **función.**

3.2 RECTA

La **forma general de la ecuación de una recta** es $ax + by + c = 0$, donde $a,\ b\ y\ c$ son constantes, y $a\ y\ b$ no son simultáneamente nulas.

Si $a = 0\ y\ b \neq 0,\ by + c = 0$ define una recta paralela al eje x, pues resulta $y = \frac{-c}{b}$.

Si $b = 0\ y\ a \neq 0,\ ax + c = 0$ define una recta paralela al eje y, pues resulta $x = \frac{-c}{a}$.

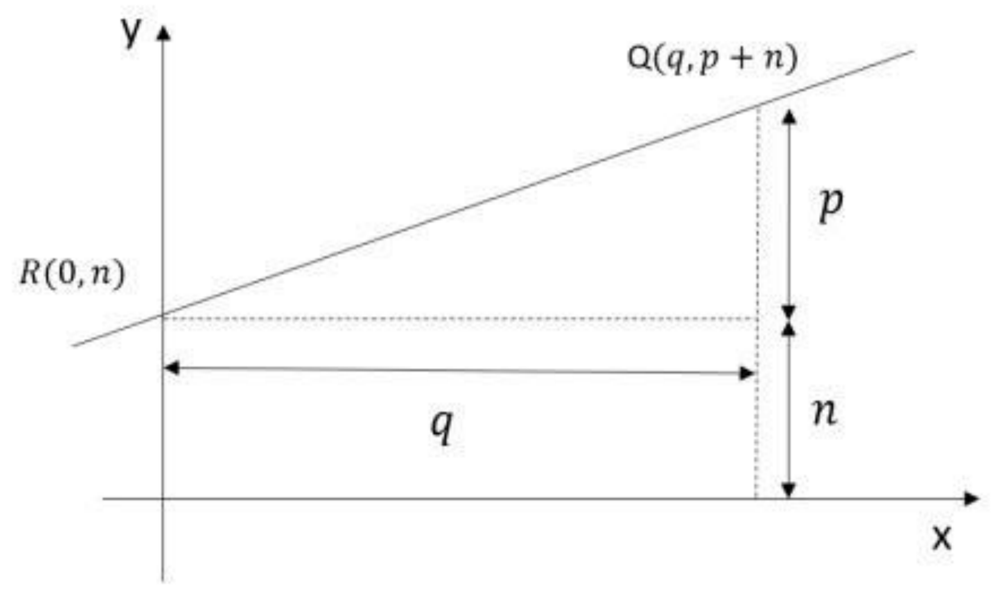
Si $b \neq 0,\ ax + by + c = 0$ puede llevarse a la expresión de la forma $y = mx + n$ se la conoce **como ecuación explícita de la recta,** siendo m la pendiente y n la ordenada al origen.

La **pendiente m** representa la "inclinación" de la recta respecto al eje horizontal y la **ordenada al origen n** es la intersección de la recta con el eje vertical.

Como una recta queda unívocamente determinada por dos puntos es suficiente asignar dos valores a la variable independiente x y obtener los correspondientes valores de y para determinar dichos puntos.

Posteriormente se ubican los mismos en el plano cartesiano y se traza la recta que ellos determinan.

Si $m = \frac{p}{q}$, con $q \neq 0$, la recta $y = \frac{p}{q}x + n$ pasa por $R(0,\ n)$ y por $Q(q,\ p + n)$



1. Si $m > 0$ la recta forma con el eje x un ángulo menor de 90° (ángulo agudo).
2. Si $m < 0$ la recta forma con el eje x un ángulo mayor a 90° (ángulo obtuso).
3. Si $m = 0$ la recta es paralela al eje x.
4. Si la recta es vertical, la pendiente no está definida.
5. Para graficar una recta lo único que necesitas es reconocer pendiente y ordenada al origen o dos puntos de la misma.

Ecuación de la recta por dos puntos dados

Sean los puntos $A = (x_1, y_1) B = (x_2, y_2)$ dos puntos de una recta que no sea vertical. La ecuación está dada por la expresión

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente.

Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares si y sólo si el producto de las pendientes de ambas rectas es igual a -1.

Ejercicios

1) Completa la tabla:

Ecuación de la recta	Pendiente	Ordenada al origen	Corte con el eje x
$y = 2x - 3$			
$y = 5x + 2$			
$y = - 2x$			
$y = 4x + \frac{5}{2}$			
$y = - \frac{1}{2} + 3x$			
$y = - \frac{1}{4}x + 2$			
$y = - \frac{3}{4}x - 3$			

2) Gráfica las ecuaciones del punto 1.

3) Representa las siguientes rectas, sabiendo que:

- **a)** Tiene pendiente -3 y ordenada al origen -1.
- **b)** Tiene por pendiente 4 y pasa por el punto (-3,2).
- **c)** Pasa por los puntos A= (-1,5) y B= (3,7).
- **d)** Pasa por el punto P= (2,-3) y es paralela a la recta de ecuación

$y = - x + 7.$

4) En las 20 primeras semanas de cultivo de una planta, que medía 4 cm, se ha observado que su crecimiento es directamente proporcional al tiempo, viendo que en la primera semana ha pasado a medir 4,8 cm. Plantea una ecuación que relacione la altura de la planta según el tiempo y representa gráficamente.

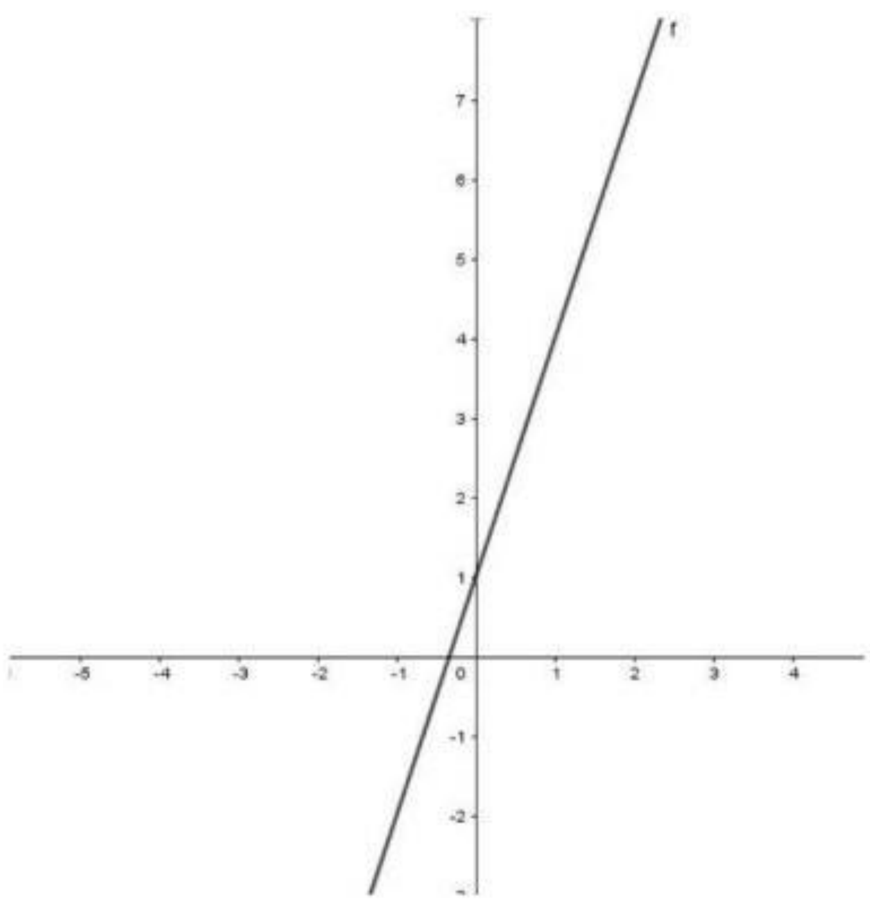
5) Por el alquiler de un coche se cobran \$120 diarios más \$2 por kilómetro:

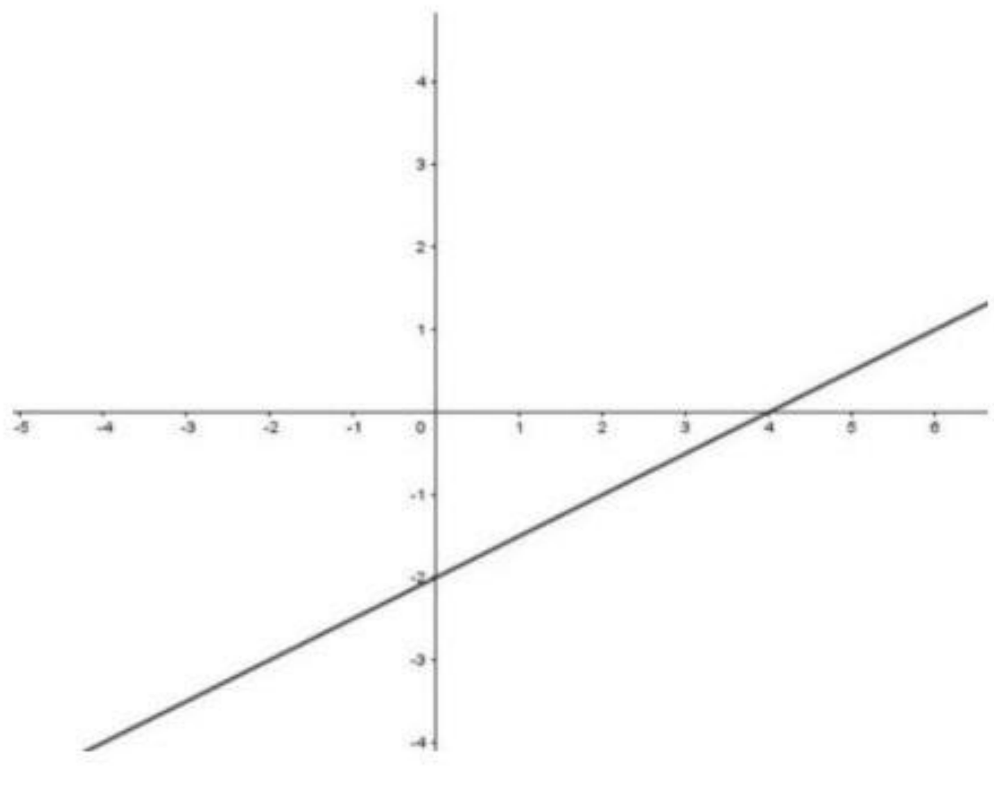
a) Encuentra la ecuación de la recta que relaciona el costo diario con el número de kilómetros y represéntala.
b) Si en un día se ha hecho un total de 415 km, ¿Qué importe debemos abonar?

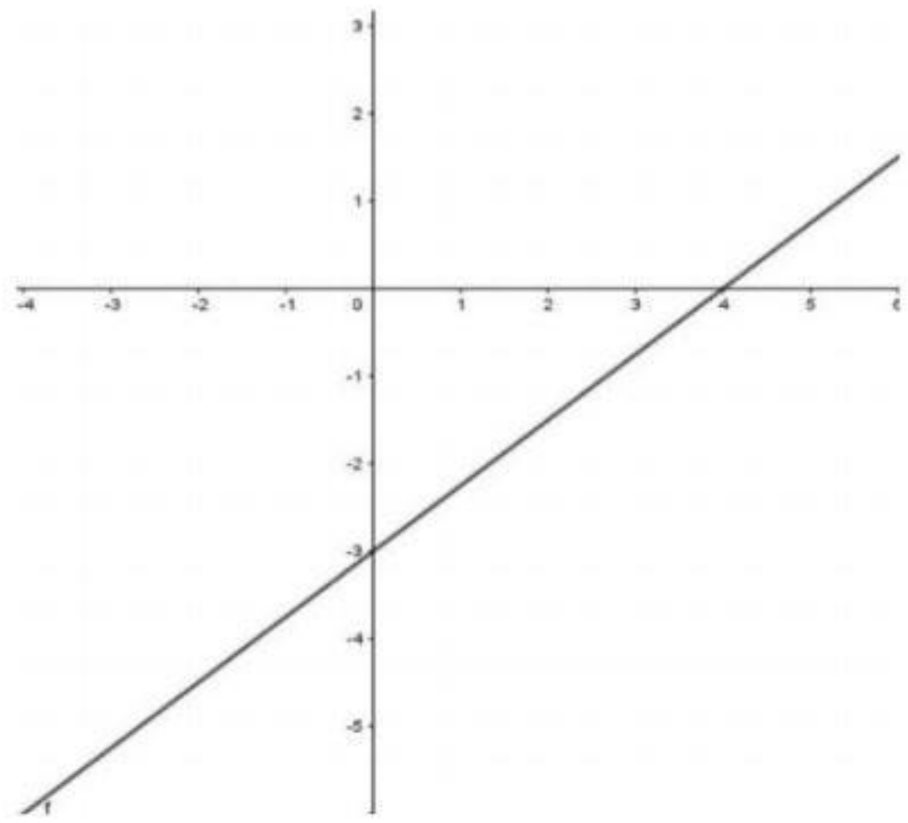
6) Calcular los coeficientes de la ecuación

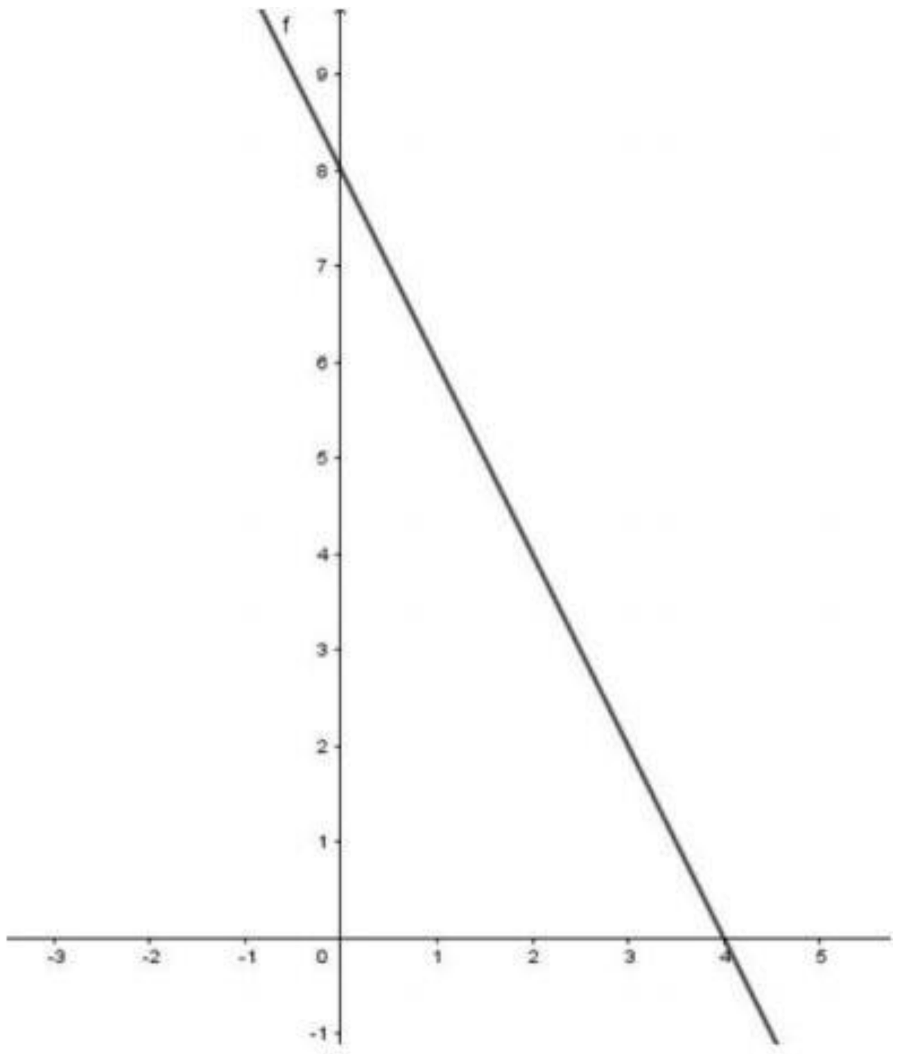
$y = ax + b\,,\ si\ (1, 2); (3, 4) \in a\ la\ ecuación$

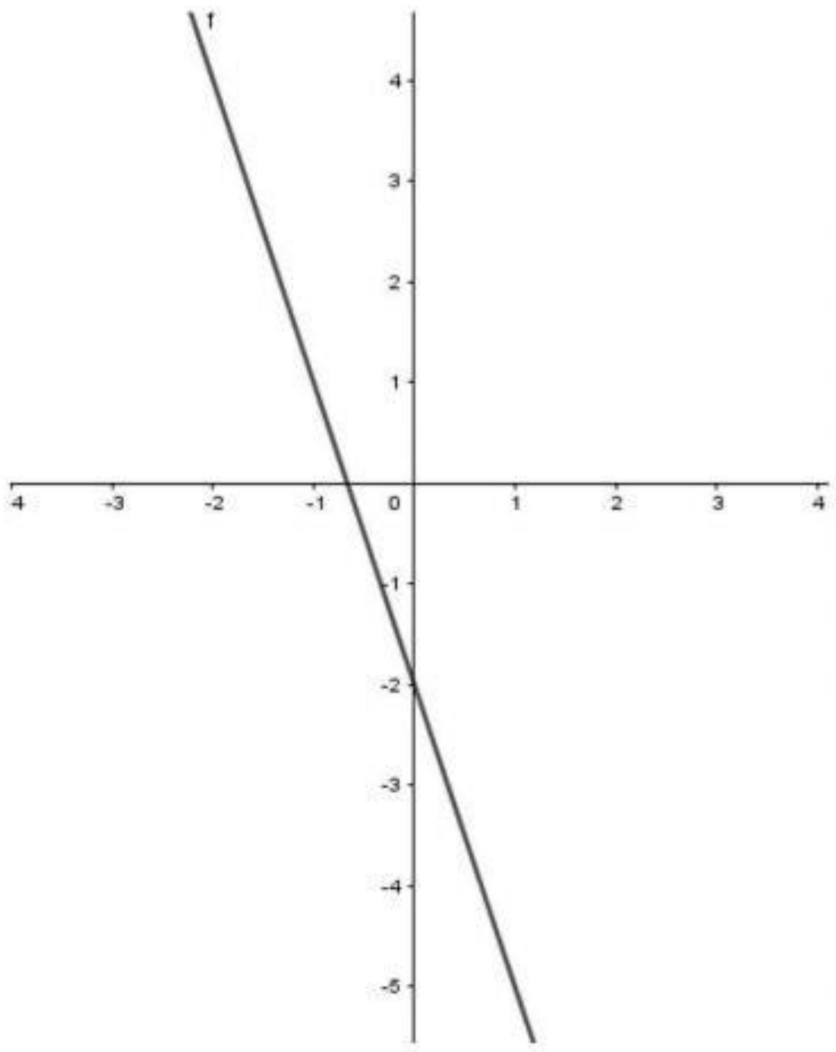
7) Determina la pendiente, ordenada al origen y formula de la ecuación de las rectas cuyas graficas se dan a continuación:





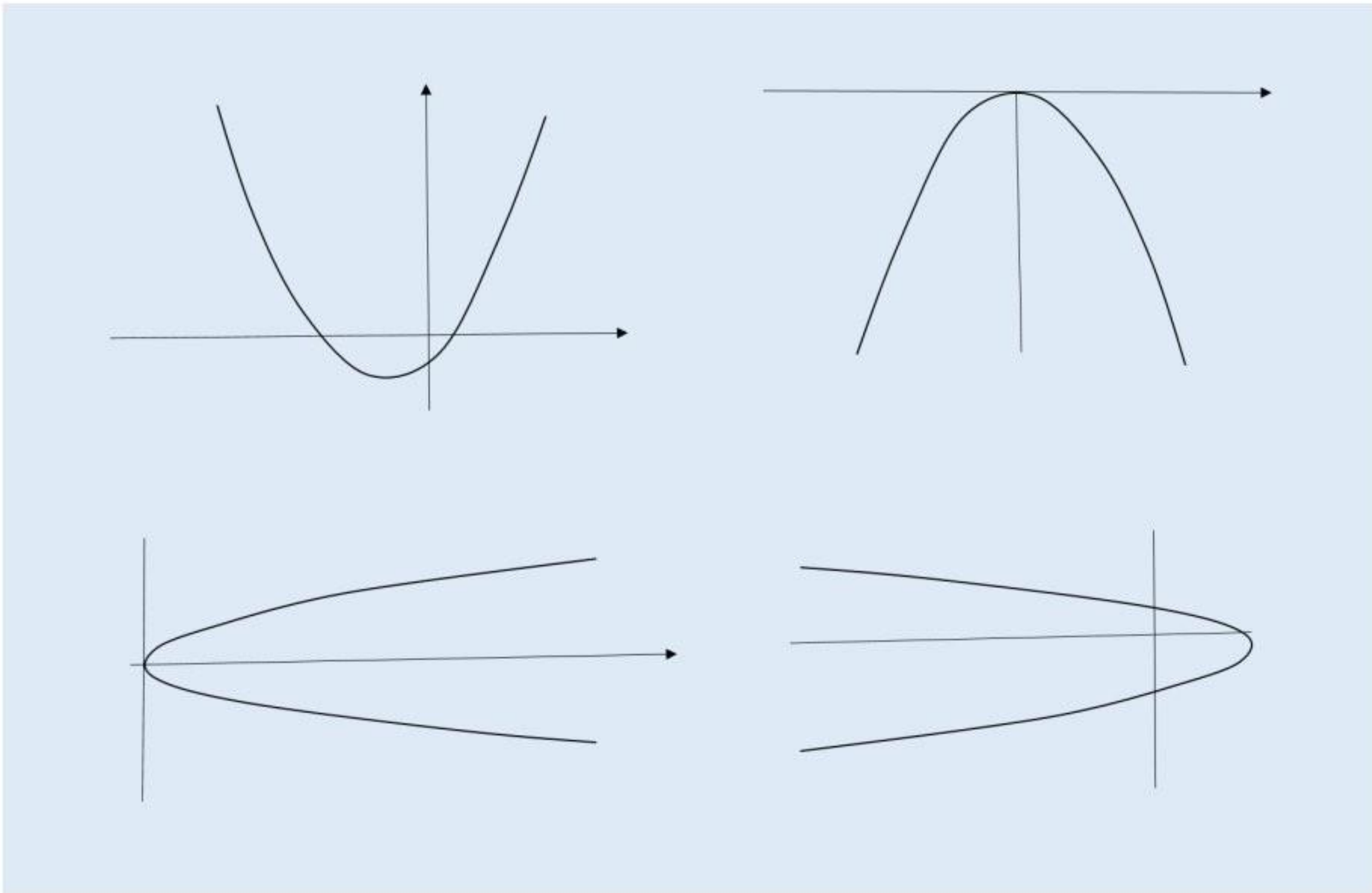






3.3. Parábola

Las siguientes gráficas son parábolas.



En este curso sólo se considerarán parábolas "verticales".

La función dada por la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$, tiene como representación gráfica una parábola ("vertical").

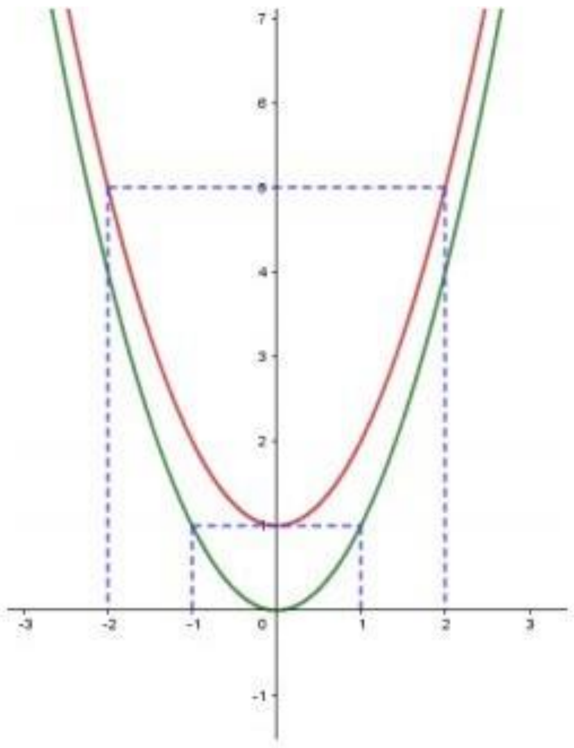
A fin de sacar conclusiones de como varían las gráficas al modificar los parámetros a, b y c, se estudian los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

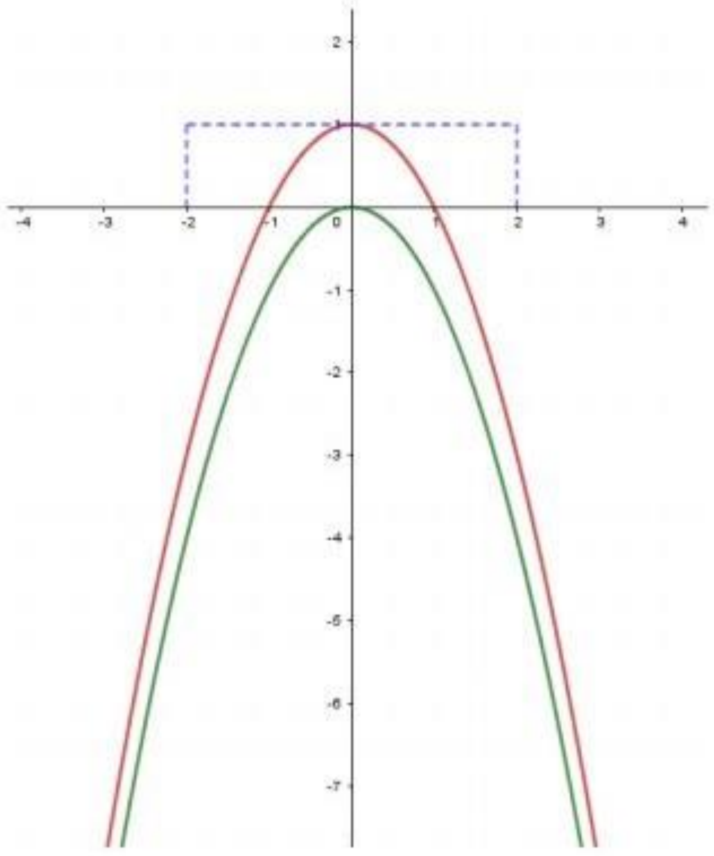
1) $y = x^2$
2) $y = x^2 + 1$
3) $y = -x^2$
4) $y = -x^2 + 1$

Se hacen tablas de valores y posteriormente se representan 1) y 2) en un sistema de ejes cartesianos y 3) y 4) en otro.

x	$y = x^2$	$y = x^2 + 1$
0	0	1
1	1	2
-1	1	2
2	4	5
-2	4	5



x	$y = -x^2$	$y = -x^2 + 1$
0	0	1
1	-1	0
-1	-1	0
2	-4	-3
-2	-4	-3



1. Si $a > 0$ la parábola se abre hacia arriba, es decir en el sentido positivo del eje y.
2. Si $a < 0$ la parábola se abre hacia abajo, es decir en el sentido negativo del eje y.
3. El eje de simetría en todos los casos es la recta de ecuación x=0. Es decir que a abscisas equidistantes de x=0, les corresponde la misma ordenada.

4. Los puntos de coordenadas (0, 0) y (0, 1) en la primera gráfica son puntos de menor ordenada en las parábolas.
5. Los puntos de coordenadas (0, 0) y (0,1) en la segunda gráfica, son puntos de mayor ordenada en las parábolas.
6. Los puntos mencionados en 4. Y 5. Es decir los de mayor o menor ordenada se llaman vértices.

¿Qué sucede si $b \neq 0$?

En este caso no es obvio respecto de qué recta es simétrica la parábola, ni cuál es el vértice de la misma. Para esto se debe llevar la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ a su forma canónica.

$$y = a(x - h)^2 + k$$

En el cual **(h, k) es el vértice** y **x=h es la ecuación del eje de simetría** y el signo de **a** indica hacia donde se abre la parábola.

El procedimiento a seguir se conoce como **método de completar cuadrados.**

Ejercicios

1) Completar la tabla:

Ecuación cuadrática	Coordenadas del vértice	Ecuación del eje de simetría
$y = (x + 3)^2 + 1$		
$y = (x - 2)^2$		
$y = \; - (x + 5)^2 - 9$		
$y = x^2 + 4$		

2) Para cada una de las siguientes parábolas se pide:

- Intersección con los ejes.
- Forma canónica, vértice, eje de simetría, mayor o menor valor de la parábola.
- Gráfica.

i. $y = 2x^2 - x + 1$

ii. $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$

iii. $y = - x^2 + 2x$

iv. $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 21$

v. $y = x^2 + 3x + 2$

vi. $y = 2x^2 - 4x + 6$

vii. $y = 3x^2 - 2x + 1$

viii. $y = 2x^2 - 12x + 19$

ix. $y =- x^2 + 2$

x. $y = x^2 - \frac{5}{2}x + 1$

xi. $y =- x^2 - \frac{1}{4}x + 2$

xii. $y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{31}{5}$

3) Una empresa constructora describe el beneficio por día (en $) de acuerdo con cierto material que vende (en kg) según la fórmula : $B(x) =- x^2 + 16x - 20$. Escribir la ecuación en su forma canónica y representar. ¿Cuánto dinero pierde si no vende ningún kg de material? ¿Cuántos kg debe vender para que el beneficio sea máximo y cuál es la ganancia?

4) El número de ciervos que se introdujeron en una isla luego de un tiempo t (en años) está dado por $N(t) =- t^2 + 21t + 100$. Exprese la ecuación en forma canónica y representar. ¿Cuántos ciervos había inicialmente y cuando se extinguirán? ¿A partir de cuantos años la manada comienza a decrecer?

5) Un grupo de biólogos estudia las características de un lago artificial en el cual introdujeron un conjunto de peces para analizar la evolución de esta población. En un principio, la colonia crece reproduciéndole normalmente, pero al cabo de unos meses algunos peces mueren, a causa del hacinamiento. Uno de los científicos plantea:

"... he llamado x a los días que han transcurrido y N a la cantidad de peces...". Mis registros indican que el conjunto de peces evoluciona según la ley:

$$N = 240 + 10x - \frac{1}{10}x^2$$

Debemos hacer algo rápidamente ya que, con esta proyección, pronto se extinguirán. Sobre la base de la ecuación dada por ese científico:

a) ¿Cuántos peces introdujeron en el lago?
b) ¿Cuál fue la cantidad máxima que llegó a haber? ¿En qué momento?
c) ¿Cuándo se extinguirá esa población?
d) Graficar usando escalas adecuadas en cada eje.
e) ¿Durante cuánto tiempo la cantidad de peces fue aumentando?

6) Desde la azotea de un edificio un objeto es lanzado hacia arriba. La distancia d, medida en metros, que hay entre el objeto y el suelo a los t segundos está dada por: $d =- 44t^2 + 44t + 33$.

a) Calcular la distancia máxima entre el objeto y el sueldo.
b) Obtener la altura del edificio.
c) ¿En cuántos segundos el objeto lanzado se toma en llegar al suelo?

7) La ganancia de una fábrica de helados está descrita por una ecuación cuadrática. Si no se vende ningún kilo, el comerciante pierde \$450. No gana ni pierde si el volumen de ventas es de 10 o de 90 kg.

a) Seleccione la ecuación correcta:

   $y =-\frac{1}{2}x^2 + 50x - 450$ ó $y =-\frac{1}{2}x^2 - 50x - 450$

b) ¿Cuál debe ser la venta para obtener la ganancia máxima? ¿de cuánto es la ganancia máxima?

c) Graficar.

8) Un científico ha determinado la temperatura "y" (°C) de una sustancia en el tiempo x (minutos) viene dada por la siguiente ecuación: $y = ax^2 + bx$. Sabiendo que cuando x=1 minuto la temperatura será de 1°C y a los 4 minutos es de -20°C, se pide:

a) Calcular a y b.
b) ¿En qué tiempo la temperatura es máxima, y cuánto vale dicha temperatura?
c) ¿Cuál es la temperatura a los 60 segundos?
d) ¿En qué tiempo la temperatura es de 5°C?
e) Graficar la ecuación.

9) Dada la función cuadrática "$y = x^2 + 4x$", se pide:

a) Estudio analítico completo.
b) Hallar gráfica y analíticamente, el punto de intersección de la parábola con la recta de ecuación $x - y - 2 = 0$.

3.4 ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad en la que intervienen variables y constantes. Si existen valores de las variables que verifican dicha igualdad se denominan raíces de la ecuación y constituyen el conjunto solución S (no vacío). En caso contrario, $S = \phi$.

Una identidad también es una igualdad en la que intervienen variables y que se verifica para todos los valores para los que está definida.

Las variables involucradas en una ecuación pueden pertenecer a diferentes conjuntos numéricos. En este curso sólo se considerarán variables en el conjunto de los números reales.

Ejemplos

1. $2x - 3 = 0$ es una igualdad que se verifica para $x = \frac{3}{2}$, por lo tanto su conjunto solución es $S = \{\frac{3}{2}\}$.

2. $x^2 - 4 = 0$ es una igualdad que se verifica para $x =- 2 \, y \, 2$. Es decir que la ecuación tiene por conjunto solución $S = \{-\ 2,\ 2\}$.
3. $x^2 + 4 = 0$. Dado que la ecuación no verifica para ningún número real, el conjunto solución es el conjunto vacío $S = \phi$, pudiendo escribir también $S = \{\}$.
4. $\frac{x^2+2x}{x} = x + 2$ es una identidad que se verifica para todo $x \neq 0$.

¿Cuándo dos ecuaciones son equivalentes?

- Si se suma en ambos miembros de una ecuación una expresión, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.
- Si se multiplican ambos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.
- Si se multiplican ambos miembros de una ecuación por una expresión que contiene variables, es posible no tener ecuaciones equivalentes, ya que se pueden introducir raíces extrañas (verifican la ecuación transformada y no la de partida), como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo

1. $2x + y = 7$

   $4x + 2y = 14$
2. $3x = 6$

   El conjunto solución de esta ecuación es $S = \{2\}$.

   Observa que si se multiplican ambos miembros de la ecuación por x, se obtiene:

   $3x^2 = 6x$.

   Por lo tanto, el conjunto solución de esta ecuación es $S = \{2,\ 0\}$. Luego, ambas ecuaciones no son equivalentes. La solución 0, el verificar la primera ecuación, es una raíz extraña.

¿Qué significa resolver una ecuación?

Resolver una ecuación es encontrar su conjunto solución. Para ello debes efectuar operaciones que lleven a ecuaciones equivalentes cada vez más sencillas.

Solución de problemas mediante el uso de ecuaciones

Existe una gran variedad de problemas a los que se les puede dar solución mediante el uso de ecuaciones.

A fin de describir un procedimiento a aplicar en la resolución de problemas, se considera el siguiente.

Problema

¿Cuántos litros de un líquido que tiene 74% de alcohol se deben mezclar con 5 litros de otro líquido que tiene 90% de alcohol, si se desea obtener una mezcla de 84% de alcohol?

- Sea $x = cantidad\ de\ líquido$ que tiene el 74% de alcohol.

- El 74% de x es: $0,74\,.\,x$, que es la cantidad de alcohol que los x litros aportan a la mezcla.
- 0,90 . 5 es la cantidad de alcohol que aportan 5 litros de otro líquido a la solución.
- $x + 5$ es la cantidad total de litros en la mezcla.
- $0,84\,.\,(x + 5)$ es la cantidad de alcohol que se desea que haya en la mezcla.

Luego debe ocurrir que:

$0,74\,.\,x + 0,90.5 = 0,84.(x + 5)$

que es la ecuación a resolver para encontrar la solución del problema. La resolución de la ecuación es:

$$0,74\,.\,x + 4,5 = 0,84.x + 4,2$$
$$0,74\,.\,x - 0,84.x = 4,2 - 4,5$$
$$-0,1\,.\,x = -0,3$$
$$x = 3$$

¿Es razonable la solución?

Se observa que x debe ser un mínimo positivo, ya que representa cantidad de litros. Un número negativo no sería solución, sería un indicio de que el problema está mal planteado o que no tiene solución. Por lo tanto $x = 3$ puede ser una solución razonable del problema.

Verificación:

$0,74.3 + 0,90.5 = 2,22 + 4,5 = 6,72$

$0,84.(3 + 5) = 0,84.8 = 6,72$

Respuesta: Se necesita 3 litros del líquido que tiene 74% de alcohol para obtener la mezcla deseada.

Para resolver problemas puedes seguir el siguiente procedimiento:

- **Leer el problema** hasta que quede perfectamente clara la situación que plantea.
- **Definir** la o las **variables** involucradas en el problema.
- **Expresar** mediante **una ecuación** la relación entre las variables y los datos,
- Luego de planteada la ecuación, **verificar que ambos miembros** de la misma **tengan igual unidad de medida**. (En nuestro ejemplo litros de alcohol)
- **Resolver la ecuación.**
- **Estudiar** si la **solución** obtenida es **razonable.**
- **Verificar la solución.**