II. Expresiones Algebraicas

"Consolidar: conceptos básicos de matemática para el ingreso al nivel superior"

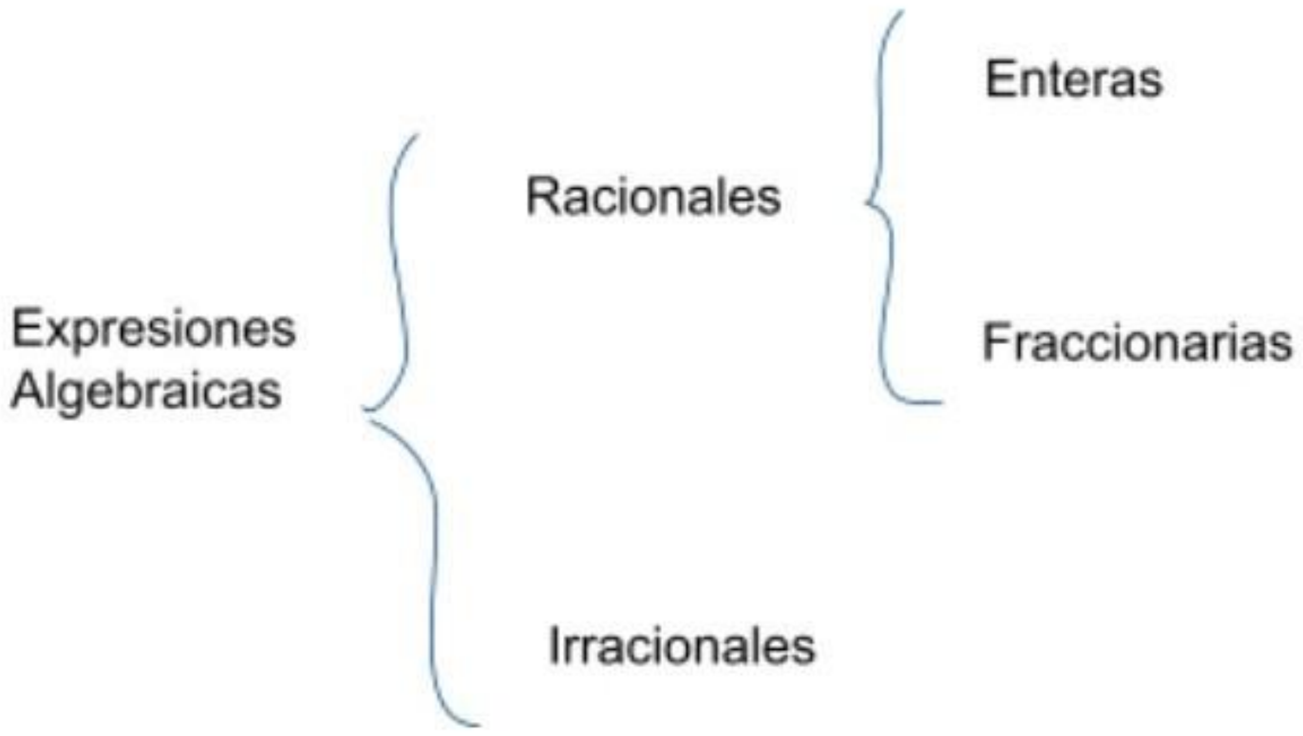
Una expresión algebraica es una combinación finita de letras y números ligadas por los signos de las operaciones aritméticas suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. A los números se los denomina coeficientes y a las letras, variables o indeterminadas.

Ejemplo

$$2x^2 + 3,\ 5x + \frac{2}{y},\ \sqrt{2x} + 3y - 5z$$

Clasificación

Según las operaciones que afecten a la o las indeterminadas:



2.1 IRRACIONALES

Tienen alguna de sus variables bajo un signo radical o con exponente no entero.

Ejemplos

$5m + 8\sqrt{b}$, $\quad -\frac{1}{3}a^2 - z^{1/3}$

2.2 RACIONALES

Son aquellas en las cuales alguna de sus variables forman parte del denominador o figuran en el numerador con exponente entero.

Ejemplos

$x + \frac{2}{y}$, $\quad 2a^{-4} + 5$

- **ENTERAS**

Son aquellas en las cuales las variables están sometidas únicamente a las operaciones de suma, resta, producto y potenciación de exponente natural.

Ejemplos

★ $\frac{2}{3}m^3 + t$

★ $\frac{1}{2} + ab^2 + \sqrt{5}ba^2 + b^3$

★ Polinomio

2.2.1 Polinomios de grado *“n”* en una variable.

La expresión general de un polinomio en una sola variable o indeterminada “*x*” es

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde

$a_n,\ a_{n-1},\ ...,\ a_2,\ a_1,\ a_0\ \in\ R$ son los coeficientes y $a_n \neq 0$

x es la variable o indeterminada

Además decimos que:

- Un **polinomio** está **ordenado** en forma creciente (decreciente) cuando el grado de cada uno de sus términos va aumentando (disminuyendo) consecutivamente.
- Tiene grado “n”, si n es **la mayor potencia** de un término del polinomio.
- El coeficiente del término que determina el grado se denomina “**coeficiente principal**”.
- El término que no tiene parte literal es el “**término independiente**”.

Ejemplo

$$P(x) = 4x^5 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + 9$$

Está ordenado de manera decreciente.

Polinomio de grado 5.

4 es el coeficiente principal.

9 es el término independiente.

- Un **polinomio ordenado es completo** cuando el grado de sus términos aumenta o disminuye de uno en uno, incluyendo al de grado cero.
- El polinomio cuyos coeficientes son todos ceros recibe el nombre de **POLINOMIO NULO**.
- El polinomio nulo carece de grado.

IGUALDAD DE POLINOMIOS

Dos polinomios son iguales $P(x)\ y\ Q(x)$ si y sólo si tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales. (Los **términos de igual grado** se llaman **términos semejantes**).

VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

En un polinomio hay coeficientes y variables, el valor numérico de un polinomio para un valor dado **"a"** de la variable es el que se obtiene reemplazando la misma por **"a"**.

POLINOMIOS NOTABLES

- MONOMIO: Un solo término.

  Ejemplos. $-8a^3b^2$, $\frac{1}{2}m^4$
- BINOMIO: Dos términos.
- TRINOMIO: Tres términos.
- CUATRINOMIO: Cuatro términos.

2.2.2 OPERACIONES CON POLINOMIOS EN UNA VARIABLE.

- ***SUMA Y RESTA***

Para sumar dos polinomios, se suman término a término los términos semejantes.

"El grado del polinomio suma es menor o igual que el grado del polinomio sumando de mayor grado".

Para efectuar la resta de dos polinomios, se suma al polinomio minuendo el opuesto del polinomio sustraendo.

Ejemplo

Dados $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 6$ y $Q(x) = 6x^2 + 7$ hallar $P(x) + Q(x)$

$$
\begin{array}{l}
2x^3 + 5x^2 - 7x + 6 \\
\qquad\ \ 6x^2 \qquad\quad + 7 \\
2x^3 + 11x^2 - 7x + 13 = P(x) + Q(x)
\end{array}
$$

- ***PRODUCTO***

  1. De un polinomio con un número real.

El producto de un polinomio por un número real se resuelve aplicando la propiedad distributiva.

Ejemplo. Si $P(x) = \frac{11}{3}x^2 - 5x + 1$, hallar $6P(x)$

$$6P(x) = 6(\frac{11}{3}x^2 - 5x + 1) = 22x^2 - 30x + 6$$

  2. De dos polinomios.

Para efectuar el producto de dos polinomios, se hace la siguiente disposición práctica

Efectuar $P(x).Q(x)$. Si $P(x) = 4x^2 - 3x + 2$ y $Q(x) = -3x + 4$

$$
\begin{array}{l}
4x^2 - 3x + 2 \\
\quad - 3x + 4 \\
\qquad 16x^2 - 12x + 8 \\
-12x^3 + 9x^2 - 6x
\end{array}
$$

$- 12x^3 + 25x^2 - 18x + 8 = P(x).Q(x)$

"El grado del producto es igual a la suma de los grados de los factores".

1. Productos especiales.

Cuadrado de un Binomio.

Cubo de un Binomio.

Diferencia de cuadrados.

- ***COCIENTE***
  1. Para resolver el cociente de un polinomio por un número real se aplica la propiedad distributiva.
  2. De dos polinomios.

     La disposición práctica se conoce como **ALGORITMO DE LA DIVISIÓN** y el procedimiento a seguir es el siguiente:
     - El polinomio dividendo debe escribirse ordenado en forma decreciente y completa.
     - Se divide el primer término del polinomio dividendo por el primer término del polinomio divisor.
     - Se multiplica este resultado por el divisor y se resta al polinomio dividendo.
     - Se bajan los términos necesarios y se repite la operación hasta obtener una expresión de grado menor que el del divisor. Esta última expresión recibe el nombre de **RESTO.**

Ejemplo

Sean los polinomios $P(x) = 4x^4 + x^2 - 2x^3 - 1$ y $Q(x) = 2x^2 - 1$ hallar $P(x): Q(x)$ usando el algoritmo de la división.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 4x^4 - 2x^3 + x^2 + 0x - 1 & 2x^2 - 1 \\ \cline{3-3}
 & -4x^4 \qquad + 2x^2 & 2x^2 - x + \frac{3}{2} \\ \cline{2-2}
 & 0 \ - 2x^3 + 3x^2 + 0x - 1 & \\
 & +2x^3 \qquad - x & \\ \cline{2-2}
 & 0 \ + 3x^2 - x - 1 & \\
 & -3x^2 \qquad + \frac{3}{2} & \\ \cline{2-2}
 & 0 \ - x + \frac{1}{2} &
\end{array}
$$

$C(x) = 2x^2 - x + 3/2$ y $R(x) = - x + 1/2$ Polinomio cociente y resto respectivamente.

Grado de los polinomios:

- $gr\ P = 4$
- $gr\ Q = 2$
- $gr\ C = 2$
- $gr\ R = 1$

El grado del cociente de dos polinomios no nulos, es la diferencia de los grados de los polinomios dividendo y divisor.

1. De un polinomio por otro de la forma $x - a$.
   Para dividir un polinomio por otro de forma lineal, se hace uso de una regla práctica conocida como **REGLA DE RUFFINI**.
   - En la primera fila se escriben los coeficientes del polinomio dividendo, ordenados en forma decreciente y completa. (si hace falta algún término se completa con ceros).
   - En el ángulo superior izquierdo se escribe "a".
   - Se baja el primero de los coeficientes y se multiplica por "a". Este resultado se escribe debajo del siguiente y se efectúa la suma.
   - Se continua el procedimiento hasta el último coeficiente. Los números obtenidos son los coeficientes del polinomio cociente, y el último número es el resto de la división.

Ejemplo

Sean los polinomios $P(x) = 3x^4 + x^2 + 5x$ y $Q(x) = x + 1 = x - (-1)$, hallar $P(x): Q(x)$ usando la regla de Ruffini.

$$3x^4 + 0x^3 + x^2 + 5x + 0$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 3 & 0 & 1 & 5 & 0\\ -1 & \downarrow & & & & \\ \hline & 3 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 3 & 0 & 1 & 5 & 0\\ -1 & & -3 & & & \\ \hline & 3 & -3 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 3 & 0 & 1 & 5 & 0\\ -1 & & -3 & 3 & -4 & -1\\ \hline & 3 & -3 & 4 & 1 & \boxed{-1} \end{array}$$

$C(x) = 3x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ y $R(x) = -1$ Polinomio cociente y resto respectivamente.

Grado de los polinomios:

- $gr\, P = 4$
- $gr\, Q = 1$
- $gr\, C = 3$
- $gr\, R = 0$

Observa que:

Al ser el divisor de grado 1, si el dividendo tiene grado n, el cociente tiene grado n-1.

2.3 FACTOREO

Al realizar el producto de polinomios, se ha probado que:

$$k\,(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0) = ka_nx^n + ka_{n-1}x^{n-1} + ... + ka_2x^2 + ka_1x + ka_0$$

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3x\,a^2 + a^3$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

También se puede probar que:

$$(x + a)(x^2 - ax + a^2) = x^3 + a^3$$

$$(x - a)(x^2 + ax + a^2) = x^3 - a^3$$

En todas las igualdades anteriores se ha llegado al polinomio del segundo miembro, aplicando la propiedad distributiva en el primero. Factorizar los polinomios del segundo miembro es expresarlos como producto, es decir, como están en el primer miembro.
En consecuencia los casos de factoreo vistos hasta el momento son:

$k\,(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} +\ldots+ a_2x^2 + a_1x + a_0) = ka_nx^n + ka_{n-1}x^{n-1} +\ldots+ ka_2x^2 + ka_1x + ka_0$ Factor Común.

$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$ Diferencia de Cuadrados.

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ Trinomio Cuadrado Perfecto.

$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3x\,a^2 + a^3$ Cuatrinomio Cubo Perfecto.

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ Trinomio Cuadrado No Perfecto.

$(x + a)(x^2 - ax + a^2) = x^3 + a^3$ Suma de Cubos.

$(x - a)(x^2 + ax + a^2) = x^3 - a^3$ Diferencia de Cubos.

Ejemplos.

1. Factorice el polinomio $P(x) = 3x^3 - 15x^2 + 9x$

   Se determina el **factor común** y se obtiene la expresión:

   $3x^3 - 15x^2 + 9x = (3x)x^2 - 5(3x)x + 3(3x) = 3x(x^2 - 5x + 3)$
2. $3x^3 - 15x^2 + 9x = 15x^2(\frac{1}{5}x - 1 + \frac{3}{5}x^{-1})$

   ¿Para qué valores de x es válida la igualdad anterior?

   ¿Es un polinomio la expresión del paréntesis?
3. $a^3 + a^2 + a + 1 = (a^3 + a^2) + (a + 1) = a^2(a + 1) + (a + 1) = (a + 1)(a^2 + 1)$

   Al no poder extraer el factor común a todos los términos, se separa la expresión en dos grupos y se saca factor común en cada uno de ellos. Al obtenerse la misma expresión en los paréntesis se constituye en un nuevo factor común, este proceso se conoce como **factor común en grupos de igual número de términos.**
4. $9x^4 - 16 = (3x^2)^2 - 4^2 = (3x^2 - 4)(3x^2 + 4)$

   Se trata de una diferencia de cuadrados. Luego de determinar las bases de los cuadrados se expresa la diferencia como el producto de la suma por la diferencia de las bases.
5. $x^6 + 14x^3 + 49 = (x^3)^2 + 2.\,7x^3 + 7^2 = (x^3 + 7)^2$
6. $x^6 - 14x^3 + 49 = (x^3)^2 + 2.\,(-7)x^3 + 7^2 = (x^3 - 7)^2$

   En los ejemplos 5. y 6, son **trinomios cuadrados perfectos**, se identifican las bases de los cuadrados, se verifica que estos sean positivos y que el término restante del trinomio sea el doble producto de las bases. Si este es positivo se trata del cuadrado de una suma, mientras que si es negativo, del cuadrado de una diferencia.

7. $x^9 - 21x^6 + 147x^3 - 343 = (x^3)^3 + 3(x^3)^2(-7) + 3x^3(-7)^2 + (-7)^3 = (x^3 - 7)^3$

   En el **cuatrinomio cubo perfecto**, se identifican las bases (con sus correspondientes signos) de los cubos, se verifica que los términos restantes del cuatrinomio sean los triples productos involucrados en el desarrollo del cubo de un binomio.

8. $x^2 - 9x + 14 = x^2 + (-7-2)x + (-7)(-2) = (x-7)(x-2)$

   Al no ser un trinomio cuadrado perfecto se buscan dos números que multiplicados den el término independiente y sumados, el coeficiente del término lineal. **Trinomio cuadrado no perfecto.**

9. $8a^3 - 27 = (2a)^3 - 3^3 = (2a-3)[(2a)^2 + 2a.3 + 3^2] = (2a-3)(4a^2 + 6a + 9)$

10. $8a^3 + 27 = (2a)^3 + 3^3 = (2a+3)[(2a)^2 - 2a.3 + 3^2] = (2a+3)(4a^2 - 6a + 9)$

    En **la suma (o diferencia) de dos potencias de igual grado impar**, se buscan las bases y se escribe un producto de dos factores, uno de los cuales es la suma (o diferencia) de las bases y el otro es un polinomio de grado una unidad menor que el dividendo, ordenado en sentido decreciente respecto de la primera base y creciente respecto de la segunda, con signos alternados (o todos positivos), según sea una suma o una diferencia.

Observa que:

Si n es par:

- Debes trabajar $x^n - a^n$ como una diferencia de cuadrados.
- Si n es una potencia de 2, $x^n + a^n$ no se puede factorizar aplicando suma de potencias de igual grado.
- Si n no es una potencia de 2, se puede expresar como $n = 2m$, con m número impar, obteniendo $x^n + a^n = (x^2)^m + (a^2)^m$, a será posible factorizar, aplicando suma de potencias de igual grado impar.

Ejemplos.

1. $\frac{81}{625}m^4 - y^4 = (\frac{9}{25}m^2 + y^2)(\frac{9}{25}m^2 - y^2) = (\frac{9}{25}m^2 + y^2)(\frac{3}{5}m + y)(\frac{3}{5}m - y)$
2. $x^6 + 1 = x^6 + 1^6 = (x^2)^3 + (1^2)^3 = (x^2+1)(x^4 - x^2 + 1)$
3. $x^2 + y^2$ no se puede factorizar en R.
4. $x^4 + 1$ no tiene a $(x+1)$ como factor, sin embargo se puede escribir:

   $x^4 + 1 = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 1)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 1)$

PARA FACTORIZAR DEBES TENER EN CUENTA QUE:

- Se pueden extraer diferentes factores comunes.
- Si tienes dos términos debes pensar en una diferencia de cuadrados, o en una suma o diferencia de potencias de igual grado impar.
- Si tienes tres términos, debes pensar en un trinomio cuadrado perfecto o en un trinomio cuadrado no perfecto.
- Si tienes cuatro términos debes pensar en un cuatrinomio cubo perfecto o en un factor común por grupo de igual número de términos.

2.4 EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

Una expresión algebraica fraccionaria o racional (EAR) es aquella que se puede expresar como cociente de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, con $Q(x)$ diferente del polinomio nulo.

Las operaciones con EAR se trabajan de igual manera que las operaciones con números racionales.

Como la división por cero no está definida, una fracción en la cual el denominador es cero no tiene significado, por lo tanto la variable no podrá asumir los valores que anulan a $Q(x)$.

Ejemplos

1. $\frac{15}{x-2}$ está definida para x tal que $x \neq 2$.
2. $\frac{2x-3}{x^2+2x+1}$ está definida para los valores de x tales que $x^2 + 2x + 1 \neq 0$, es decir para $x \neq -1$.
3. $-\frac{10x}{2(x^2-16)} - \frac{3+x}{x-4} + \frac{x^2}{4+x}$ está definida para los valores de x tales que $x^2 - 16 \neq 0$, es decir para $x \neq 4$, y $x \neq -4$.

2.4.1 Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

1. Cuando simplificas un número racional, lo que haces es simplificar el mismo factor del numerador y del denominador.

   Ejemplo.

   $\frac{9}{6} = \frac{3.3}{2.3} = \frac{3}{2}$

   Esto lleva a pensar que las **EAR** deben estar factorizadas para poder simplificar.

   Ejemplo.

   $\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)^2} = \frac{x-2}{x-3}$

   Al efectuar la simplificación, tienes que tener en cuenta que lo que cancelas debe ser diferente de cero. Por lo tanto, en este caso, $x - 3 \neq 0$.

   Observa que **simplificas factores**, no sumandos.

2. En una operación, siempre que se pueda, es lícito simplificar el numerador y el denominador de la misma fracción.

$1+\frac{x-2}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}=1+\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x+2}=1+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+2}=1$

Teniendo en cuenta lo expresado en el punto 1, debe ser $x-2\neq 0$ ¿puede ser $x=-2$?

3. En el producto de fracciones numéricas, siempre que se pueda, es lícito simplificar cualquier numerador con cualquier denominador. Lo mismo puedes hacer con las EAR, teniendo en cuenta las condiciones de definición de las mismas.

Ejemplo.

$\frac{x^3+7x^2+6x}{x^2-1}.\frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2+x-1}.\frac{3}{x^2}=\frac{x(x+6)(x+1)}{(x-1)(x+1)}.\frac{(x-1)^2}{(x^2+1)(x-1)}.\frac{3}{x^2}=$

$=\frac{x(x+6)}{x-1}.\frac{(x-1)}{x^2+1}.\frac{3}{x^2}=(x+6).\frac{1}{x^2+1}.\frac{3}{x}=\frac{3(x+6)}{x(x^2+1)}$

¿Para qué valores de x no está definida la expresión dada?

4. En la suma algebraica de fracciones, debes sacar común denominador, pero las operaciones se hacen más sencillas cuando se trabaja con el mínimo común denominador. Para obtenerlo, los denominadores deben estar expresados como producto.

Ejemplo

$\frac{2x-5}{2x^2-10x+12}-\frac{x-1}{4x^2-16x+16}-\frac{2}{4x-12}=$

$2x^2-10x+12=2(x^2-5x+6)=2(x-3)(x-2)$

$4x^2-16x+16=4(x^2-4x+4)=4(x-2)^2$

$4x-12=4(x-3)$

m.c.m $4(x-2)^2(x-3)$

Observa que la expresión tiene sentido sólo si $x\neq 2$ **y** $x\neq 3$

El mínimo común múltiplo (m.c.m) se obtuvo como el producto de todos los factores comunes y no comunes a todos los denominadores, elevados a la mayor potencia que aparece. Luego, el ejercicio se desarrolla como sigue:

$\frac{2x-5}{2x^2-10x+12}-\frac{x-1}{4x^2-16x+16}-\frac{2}{4x-12}=$

$=\frac{2x-5}{2(x-2)(x-3)}-\frac{x-1}{4(x-2)^2}-\frac{2}{4(x-3)}=$

$=\frac{2(x-2)(2x-5)-(x-1)(x-3)-2(x-2)^2}{4(x-2)^2(x-3)}=$ (1)

$=\frac{(2x-4)(2x-5)-(x^2-4x+3)-2(x^2-4x+4)}{4(x-2)^2(x-3)}=$ (2)

$=\frac{4x^2-10x-8x+20-x^2+4x-3-2x^2+8x-8}{4(x-2)^2(x-3)}=$

$$= \frac{x^2-6x+9}{4(x-2)^2(x-3)} = \frac{(x-3)^2}{4(x-2)^2(x-3)} = \frac{x-3}{4(x-2)^2} \quad (3)$$

Debes observar los paréntesis que se introdujeron en (1) y en (2), todos necesarios, porque sino las operaciones serían otras, no las que se efectuaron.

En (3) debes visualizar que al llegar al primer resultado, factorizar el numerador a fin de llevarlo a su mínima expresión. En la simplificación final, la condición es $x - 3 \neq 0$.

Observa que:

Los pasos seguidos para efectuar una suma algebraica de EAR son:

- Factorizar los denominadores.
- Determinar los valores para los cuales la expresión no está definida.
- Determinar el mínimo común múltiplo (m.c.m), de los denominadores.
- Dividir el m.c.m en cada denominador y multiplicar por el correspondiente numerador, colocando los paréntesis necesarios.
- Aplicar propiedad distributiva en el numerador. No te olvides que si tienes tres factores, debes multiplicar dos de ellos y el resultado por el tercero.
- Agrupar los términos semejantes.
- Factorizar el numerador.
- Simplificar aclarando los valores que no pueden tomar las variables.

Los pasos a seguidos para efectuar un producto o un cociente de EAR son:

- Factorizar los numeradores y denominadores.
- Simplificar aclarando los valores que no pueden tomar las variables.
- Operar como números racionales.

Lo fundamental en este tipo de operaciones es el trabajo ordenado.

Ejemplos integradores

1. Sea $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$
   a. Califica con verdadero o falso y justifica tu respuesta:
      i. El valor numérico de $P(x)$ para $x = \sqrt{2}$ es 6,071.
      ii. -3 es un cero del polinomio $P(x)$.
      iii. Los únicos ceros de $P(x)$ son 1 y -3.
   b. Si $T(x) = x^3(x+3)[P(x)]^2$ ¿Cuáles son los ceros de $T(x)$? (Sugerencia: No efectúes el producto).

- $P(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 + 5(\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} - 9 = 2\sqrt{2} + 5.2 + 3\sqrt{2} - 9 = 5\sqrt{2} + 1 \neq 6,071$

Falso.

- $P(-3) = (-3)^3 + 5(-3)^2 + 3(-3) - 9 = -27 + 5.9 - 9 - 9 = -27 + 45 - 18 = 0$

Verdadero.

- $P(x) = (x+3)(x^2 + 2x - 3)$

  $x^2 + 2x - 3 = 0$ luego $(x+3)(x-1) = 0$ ósea $x = -3$ o $x = 1$ por lo tanto,

  $P(x) = (x+3)(x+3)(x-1) = (x+3)^2(x-1)$

  Luego $P(x) = 0$ si y sólo si $x + 3 = 0$ o $x - 1 = 0$, por lo tanto los únicos ceros son 1 y -3.

  Verdadero.

$T(x) = x^3(x+3)[P(x)]^2$

$T(x) = 0$ implica que:

- $x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$
- $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$
- $[P(x)]^2 = 0 \Rightarrow P(x) = 0$

Los ceros de $P(x)$ son: -3 y 1 entonces los ceros de son:0, -3 y 1.

Ejercicios

1. Lee la parte introductoria de esta unidad.

a. Clasifica los textos en esquema de contenido analizante o sintetizante, según corresponda.

b. ¿Encuentra alguna idea abarcadora en los mismos?

2. Identifica los polinomios en las siguientes expresiones:

a. $2x^2 + \log x$

b. $(\log 3)x^2 + x^3$

c. $x^{3/2} - 5x + 3$

d. $7^{3/2} - 5x + 3x^2$

e. $x^{-3} + 2x^{-2} - 5$

f. $3/x + 12x - 2$

3. En los polinomios del ejercicio anterior

a. Identifica los coeficientes y los grados de los mismos.

b. ¿Están ordenados?¿Están completos?

4. En las expresiones del ejercicio 2, indica para qué valores están definidas.

5. Calcula $P(a)$ si:

a. $P(x) = 8x^5 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 1;\ a = -1$

b. $P(u) = u^3 - 3/2u^2 + 3/2u - 1;\ a = u + 1$

6. Dados $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 1$, $Q(x) = -3x^3 + 4x^2 - x - 2$ y $R(x) = x^3 - x^2 + 1$.

Calcula:

a. $P(x) - Q(x) + R(x)$

b. $P(x).Q(x) + R(x)$

c. $\frac{P(x)-2Q(x)}{R(x)}$

d. $(P(x) - 2).R(x)$

e. $P(x).(Q(x) + R(x))$

f. $(P(x) + Q(x)):(P(x) + Q(x) - R(x))$

7. Dado cualquier polinomio P, ¿siempre existe un polinomio Q tal que P.Q=1? ¿En qué casos sucede esto?

8. **a.** Si el polinomio P es de grado cero y Q es de grado n ¿cuáles son los grados de los polinomios P.Q y P+Q?

   b. Si los polinomios P y Q son de grado n, ¿cuáles son los grados de los polinomios P.Q y P+Q?

9. Dados P y Q realiza la división de P en Q, encontrando el cociente y el resto. En caso de ser posible aplica la regla de Ruffini.

   a. $P(x) = x^4 - 2x^5 - 2x^2 + 5x - 4$ $\quad Q(x) = x^3 - 2x + 4$

   b. $P(x) = x^3 - 3x + 4$ $\quad Q(x) = 2x^3 - 5x + 3$

   c. $P(t) = t^4 + 5t^3 - 2t^2 - t$ $\quad Q(t) = t - 2$

   d. $P(x) = x^5 - 2x^2 - 3x^4 - x + 3$ $\quad Q(x) = x + 1$

   e. $P(s) = s^3 - s + 1$ $\quad Q(s) = 2s + 2$

10. Sabiendo que

    $(a + b)x^3 + ax^2 + (c + a)x + d - c = 5x^3 + 7x^2 + 3x - 2$

    Calcula a, b, c y d.

11. Sabiendo que:

    $P(x) = 3ax^2 - (5/2)\,b\,x + c;\ Q(x) = (1/2)x^2 - (1/2)\,b\,x - 5$ y

    $P(x) - Q(x) = 4ax^2 - (3/2)x - 8c$. Calcula a, b y c.

12. En los ejercicios siguientes indica, sin hacer el cociente, si es exacta la división de P por $(x - a)$.

a. $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 6, \quad a = 1$

b. $P(x) =- 2x^3 + 5x^2 - 3x + 2, \quad a =- 1$

c. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 8x - 4, \quad a = 2$

13. Factorea:

a. $2x^3 - 3x^2 - 7x - 8x^2 + 12x + 28$

b. $\frac{1}{4}x^2 - 81$

c. $(x + 2a)^2 - (x + 3a)^2$

d. $x^5 - 32$

e. $x^6 - y^6$

f. $9a^2b - 25a^4b^3$

g. $8 - 8x^2 + x^3 - x^5$

h. $2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b$

i. $(x + 1)^2 - (x - 1)^2$

j. $81x^{24}y^8 - 1$

14. De las siguientes expresiones extrae el factor común indicado.

Expresión	**Factor común**
$4ay^3z^4 - 10a^3y^5z + 24ay^2$	$4a^2y$
$\frac{3}{5}x^5y^3z^2 - \frac{1}{25}x^3y^4z^5 + \frac{9}{10}x^2y^2z$	$25x^3y^4z$
$1 - 6y + 12y^2 - 8y^3$	$6y^2$

15. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a. $\frac{a^3-8}{a^2b+2ab+4b-a^2-2a-4}$

b. $\frac{y^2-6y+9}{ym-3m+y-3}$

c. $\frac{nx-1-n+x}{nx-2-n+2x}$

d. $\frac{ab-2b-a+2}{a^2-4}$

16. Reduce a su mínima expresión:

a. $\frac{10yz-10y}{7mz+7m}.\frac{bz+b}{5yz+10y}.\frac{3}{2}b.\frac{m}{b^2z-b^2}$

b. $\frac{10ab-6a}{y+x}.\frac{x^2-y^2}{am-a}.\frac{m-1}{20b-12}$

c. $\frac{c^3-m^3}{(c+m)^3}.\frac{2c^3+6c^2m+6cm^2+2m^3}{ac-am+bc-bm}.\frac{1}{c^2+cm+m^2}$

d. $\frac{x-z}{4bx} + \frac{2z}{8bz} - \frac{11ax-5az}{24axb}$

e. $\frac{5}{x^2+2x} - \frac{2}{x^2-4x+4} - \frac{3}{x^2-4}$

f. $\frac{a-b}{b} + \frac{2a}{a-b} - \frac{a^3+a^2b}{a^2b-b^2}$